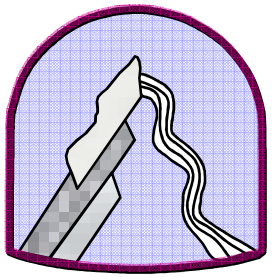
《高等土力学》之二

土的本构关系



第二章 土的本构关系

2.1 概述
2.2 应力和应变
2.3 土的应力变形特性
2.4 土的弹性模型
2.5 土的弹塑性模型的一般原理
2.6 剑桥模型(Cam—Clay)
2.7 其它典型弹塑性模型
2.8 土的损伤模型
2.9 土的广义位势理论

第二章 土的本构关系

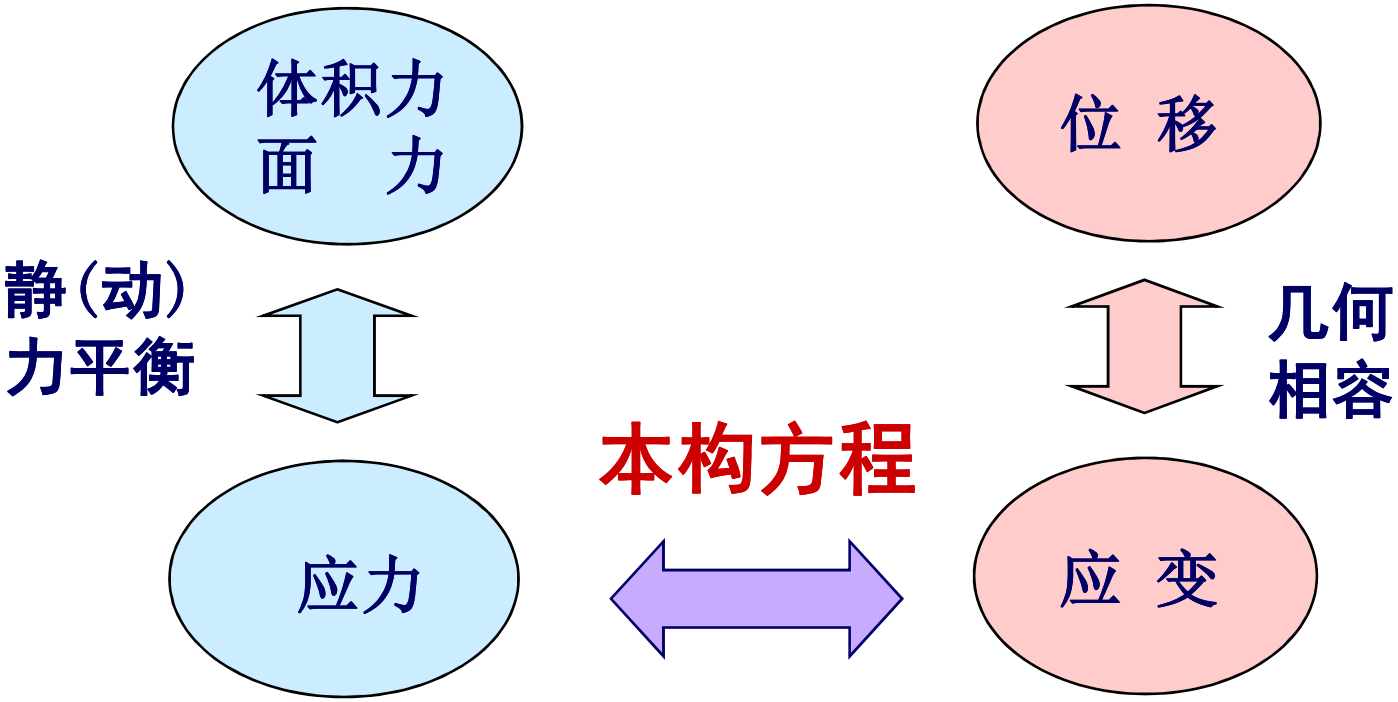
本章内容提要

- ☞ 土的变形特性
- ☞ 土的非线性弹性模型
  - 邓肯张EB和Eμ模型
- ☞ 土的弹塑性模型
  - 剑桥模型(CamClay)
  - Lade-Duncan模型
  - 清华弹塑性模型
  - 沈珠江双屈服面模型

- 土的本构关系 *Constitutive relationship*
- 土的本构定律 *Constitutive law*
- 土的本构方程 *Constitutive equation*
- 土的数学模型 *Mathematical model*

是反映土的力学性状的数学表达式，表示形式一般为应力—应变—强度—时间的关系

本构关系的定义



本构关系在应力应变分析中的作用

传统土力学分析方法

- 变形问题（地基沉降量）
  - 弹性理论计算应力
  - 压缩试验测定变形参数
  - 弹性理论+经验公式计算变形
- 稳定问题（边坡稳定性）
  - 土体处于极限平衡状态
  - 滑动块体间力的平衡
  - 刚体+理想塑性计算安全系数

现代土力学分析方法 → 应力变形的综合分析

- 计算机数值模拟计算
  - 土体的本构模型
  - 数值计算方法：有限元等
  - 应力变形稳定的综合分析
- 模型试验：如离心机模型试验

本构关系与土力学分析方法

- 传统土力学：线弹性、刚塑性或理想塑性
- 研究初期：20世纪60年代，高重建筑物及深厚基础问题；计算机技术发展
- 迅速发展时期：80年代达到高潮，“土力学园地中最绚烂的花朵”
- 目前：土的结构性、非饱和土、循环加载、动力本构模型等

土的本构关系的发展

第二章 土的本构关系

2.1 概述 √

2.2 应力和应变

2.3 土的应力变形特性

2.4 土的弹性模型

2.5 土的弹塑性模型的一般原理

2.6 剑桥模型(Cam—Clay)

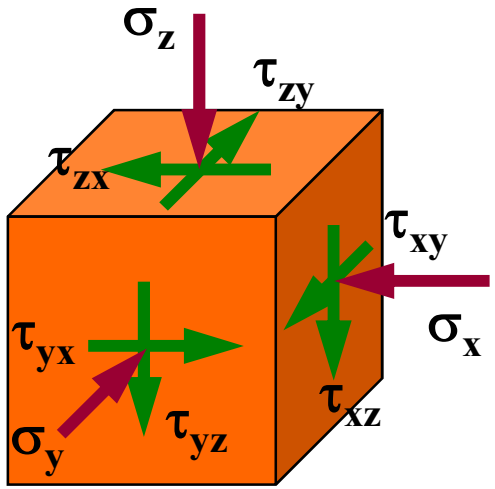
2.7 其它典型弹塑性模型

2.8 土的损伤模型

2.9 土的广义位势理论

1. 应力张量
2. 应力张量的坐标变换
3. 应力张量的主应力和应力不变量
4. 球应力张量与偏应力张量
5. 八面体应力
6. 主应力空间与平面
7. 应力洛德角

应　力



$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

☞ 二阶对称张量，具有6个独立的分量

应力分量与应力张量

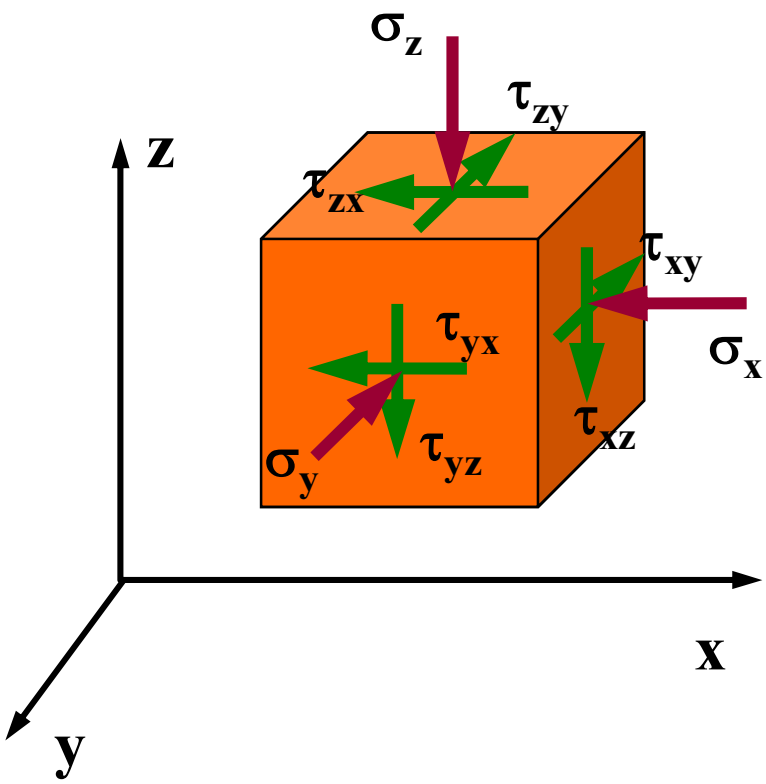
- 6个独立变量用矩阵表示，常用于数值计算

$$\{\sigma\}=\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\\ \tau_{xy}\\ \tau_{yz}\\ \tau_{zx}\end{Bmatrix}$$

应力分量与应力张量

P42

■ 应力计算



- 正应力：压为正
- 剪应力：

  正面 - 与坐标轴方向相反为正

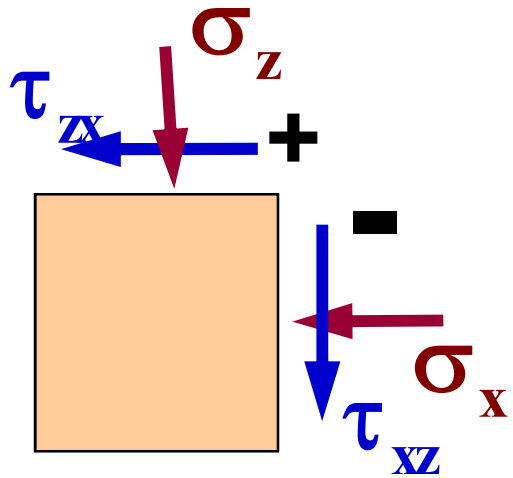
  负面 - 与坐标轴方向相同为正

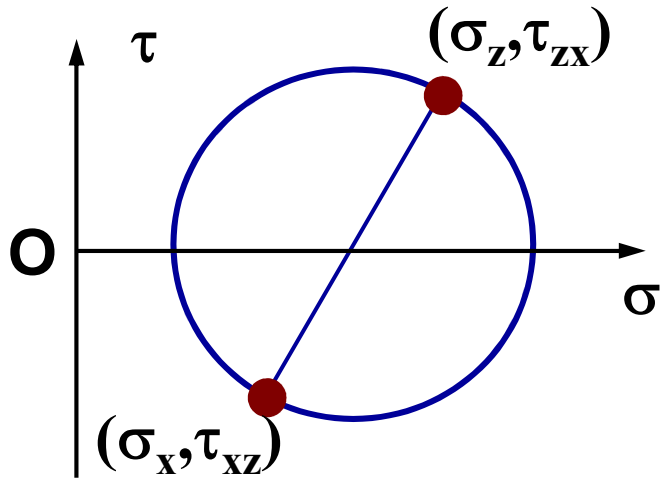
τ_{zy} ： z为作用面法向；

y为剪应力方向

土力学中应力符号规定

■ 摩尔圆

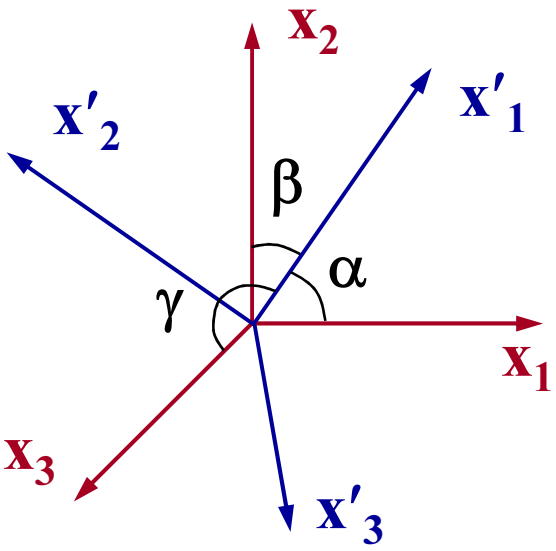




- 正应力：压为正，拉为负
- 剪应力：外法线逆时针为正；顺时针为负

土力学中应力符号规定

$$\sigma_{i'j'} = \alpha_{i'k}\alpha_{j'l}\sigma_{kl}$$



kl ： 原坐标(x_1, x_2, x_3)

i′j′ ： 新坐标(x'_1, x'_2, x'_3)

$\alpha_{i'k}$， $\alpha_{j'l}$ 与为新和原坐标系轴夹角的余弦

其中，$a_{1'1}=\cos\alpha$， $a_{1'2}=\cos\beta$， $a_{1'3}=\cos\gamma$

☞ 主应力：σ_1，σ_2，σ_3在三个剪应力为零方向上的正应力

应力张量的坐标转换与主应力

P43-44

◆ 主应力方程：　$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0$

☞ 第一应力不变量　$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$

☞ 第二应力不变量

$$I_2 = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1$$

☞ 第三应力不变量

$$I_3 = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$$

应力张量的应力不变量

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{11}-\sigma_m & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22}-\sigma_m & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}-\sigma_m \end{bmatrix}$$

σ_{ij}	$\sigma_m\delta_{ij}$	$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}$
应力张量	球应力张量	偏应力张量

σ_m球张量分量，其物理意义代表作用于该点的平均正应力或静水压力分量，其值为$\sigma_m=I_1/3$

球应力张量与偏应力张量

$$s_{ij}=\sigma_{ij}-\frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{kk}=\begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \sigma_{11}-\sigma_m & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22}-\sigma_m & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}-\sigma_m \end{bmatrix}$$

式2-14

s_{ij}偏应力张量，其物理意义代表作用于该点的纯剪应力分量

偏应力张量

P45

$$J_1 = S_{kk} \equiv 0$$ 式2-16

$$J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} = \frac{1}{6}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]$$ 式2-17

$$J_3 = \frac{1}{3} S_{ij} S_{jk} S_{ki}$$ 式2-18

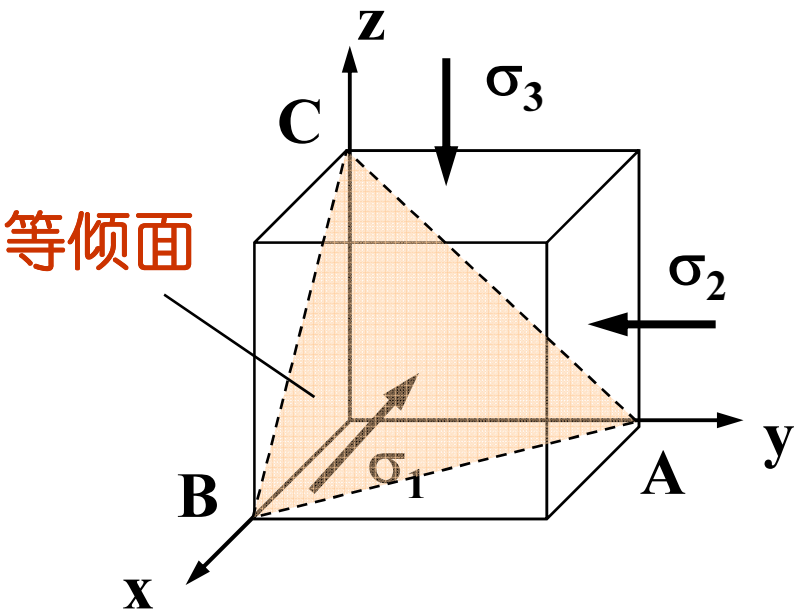
$$= \frac{1}{27}(2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3)(2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3)(2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2)$$

偏应力张量的不变量

- 球应力张量分量，其物理意义代表作用于该点的平均正应力或静水压力分量。在弹性和经典塑性理论中，只产生体应变，即只发生体积变化而不发生形状变化
- 偏应力张量，其物理意义代表作用于该点的纯剪应力分量。在弹性和经典塑性理论中，只产生剪应变，即只发生形状变化而不发生体积变化

球应力张量与偏应力张量

P45



应力主轴坐标系

图2-3

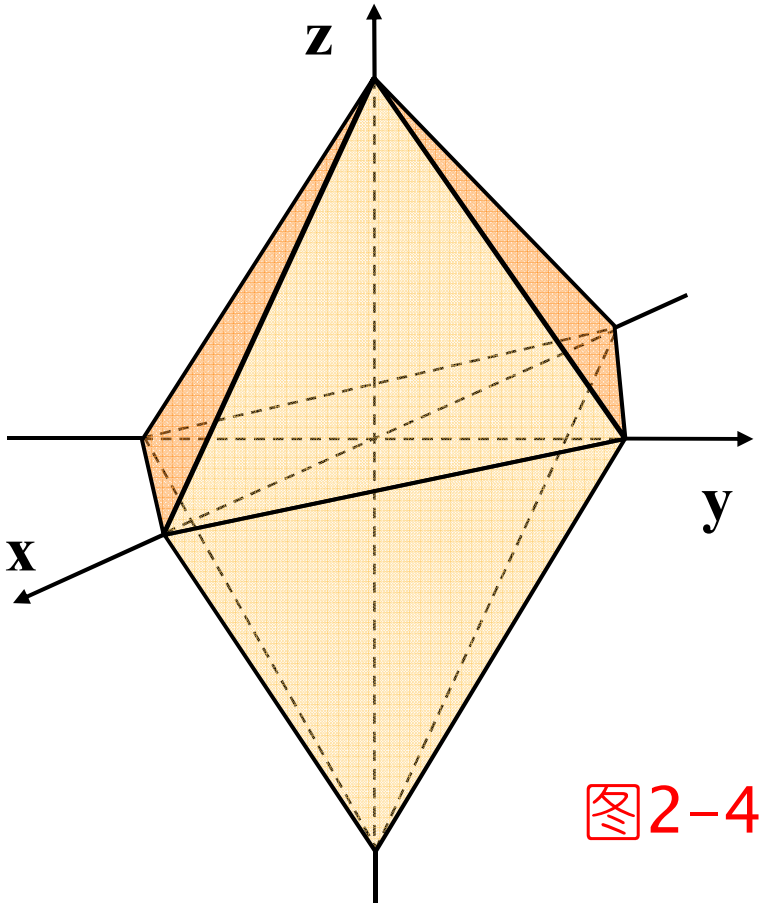
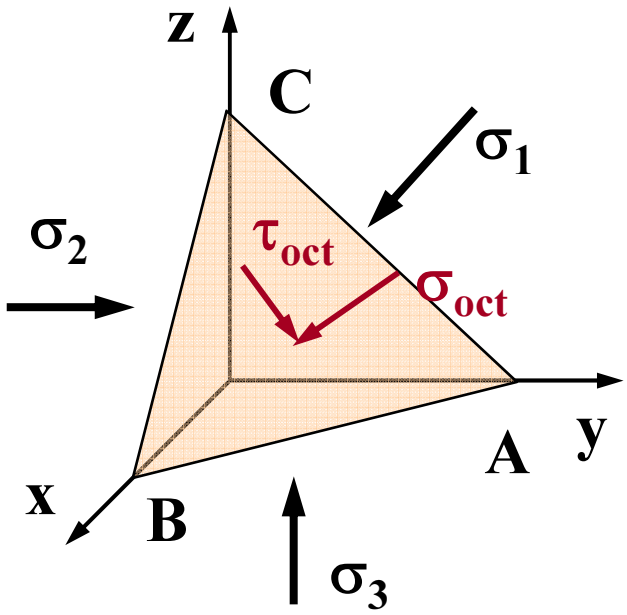


图2-4

八面体面



对八面体面ABC，作用在该面上的正应力和剪应力分别称为八面体正应力σ_{oct}和八面体剪应力τ_{oct}：

$$\sigma_{oct}=\frac{1}{3}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)=\sigma_m=\frac{I_1}{3}$$

$$\tau_{oct}=\frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}=\sqrt{\frac{2}{3}J_2}$$

平均主应力

$$p=\sigma_{oct}=\frac{1}{3}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)=\frac{I_1}{3}$$

式2-23

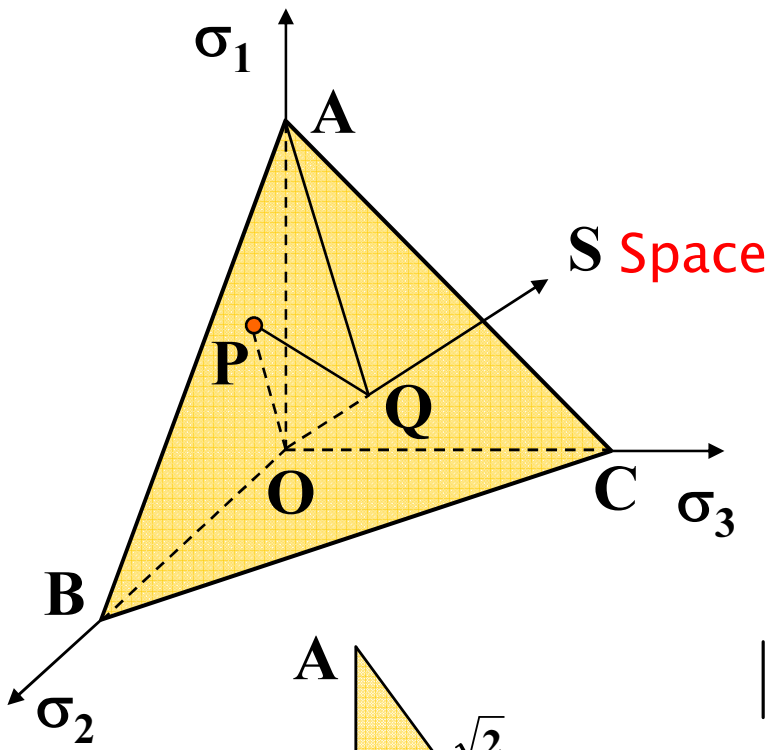
广义剪应力

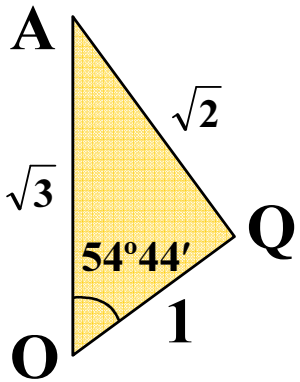
$$q=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}=\frac{3}{\sqrt{2}}\tau_{oct}$$

式2-24

八面体应力

P46





OS：　空间对角线$\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3$与三个主应力轴的夹角成54°44′

ABC：与OS垂直的面，称π平面，$\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3$=常数

$$|OQ| = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3) = \sqrt{3}\sigma_{oct} = \sqrt{3}I_1$$

式2-28

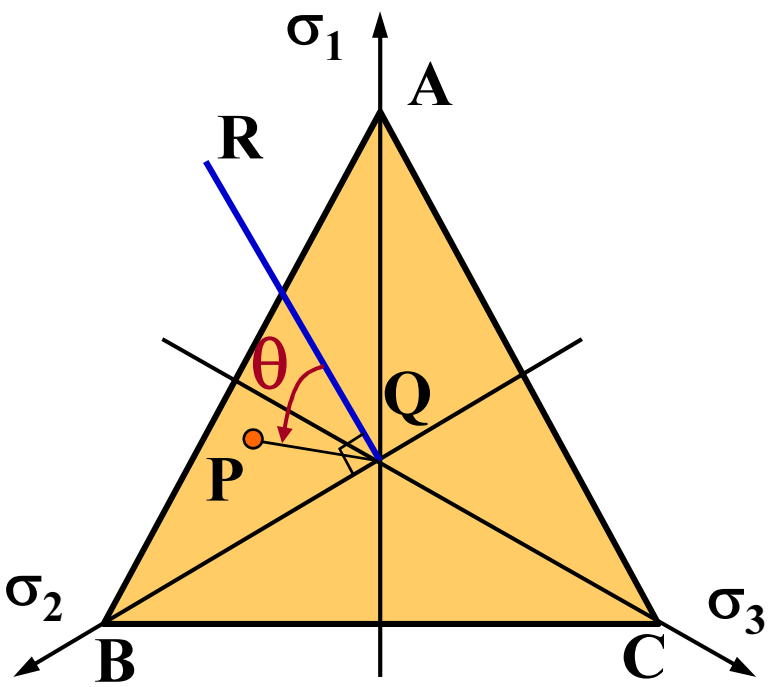
$$|PQ| = \frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2}$$

$$= \sqrt{3}\tau_{oct} = \sqrt{2J_2} = \sqrt{\frac{2}{3}}q$$

式2-29

主应力空间与π平面

P46



π平面

图2-5

RQ：σ_1和σ_2之间 与σ_2垂直

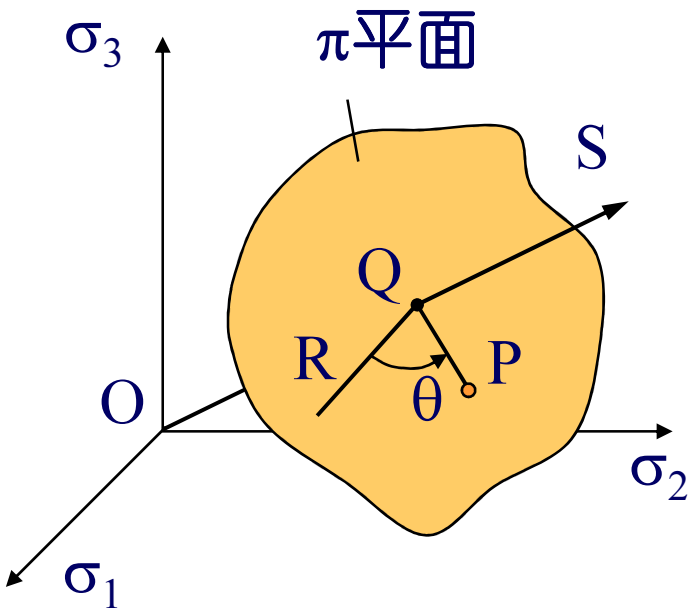
θ ： PQ和RQ之间的夹角，以PQ起逆时针为正

$$tg\theta = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sqrt{3}(\sigma_1 - \sigma_3)} = \frac{\mu_\sigma}{\sqrt{3}} = \frac{2b-1}{\sqrt{3}}$$

- 洛德参数 $\mu_\sigma = \dfrac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}$ 式2-30
- 毕肖甫常数 $b = \dfrac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3}$ 式2-31

应力洛德角

P47



- 平均主应力p：π平面的位置OQ
- 剪应力q：π平面上到Q距离PQ
- 洛德角θ：π平面上的角度

三个独立的应力参数P、q和θ可以确定应力点P在应力空间的位置

常用的三个应力不变量

■ 三轴应力状态： $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

- 平均主应力 $$p = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3}(\sigma_1 + 2\sigma_3)$$

- 广义剪应力 $$q = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sigma_1 - \sigma_3$$

- 应力洛德角θ $$\mathrm{tg}\theta = \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sqrt{3}(\sigma_1 - \sigma_3)}$$

- 三轴压缩试验（$\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$）：$\theta = -30^o$
- 三轴伸长试验（$\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$）：$\theta = 30^o$

常用的三个应力不变量

- 与应力的情况相似

- 体应变

$$\varepsilon_v = \varepsilon_{kk} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = I_{1\varepsilon}$$

式2-46

- 广义剪应变

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}$$

式2-47

- 应变洛德角

$$\mathrm{tg}\theta_\varepsilon = \frac{2\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_3}{\sqrt{3}(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)}$$

式2-48

应　　变

P50

第二章 土的本构关系

2.1 概述 √

2.2 应力和应变 √

2.3 土的应力变形特性 P51

2.4 土的弹性模型

2.5 土的弹塑性模型的一般原理

2.6 剑桥模型(Cam—Clay)

2.7 其它典型弹塑性模型

2.8 土的损伤模型

2.9 土的广义位势理论

土的应力变形特性

基本特性

- 非线性
- 压硬性
- 剪胀性
- 摩擦性

亚基本特性

- 应力历史依存性
- 应力路径依存性
- 各向异性
- 结构性
- 蠕变特性
- 颗粒破碎特性
- 温度特性等

关联基本特性

- 屈服特性
- 正交流动性
- 相关联性
- 共轴特性
- 临界状态特性等

土的基本特性、本构关系及数值模拟研究综述，土木工程学报，2012年第3期

姚仰平、 张丙印、朱俊高（2011）

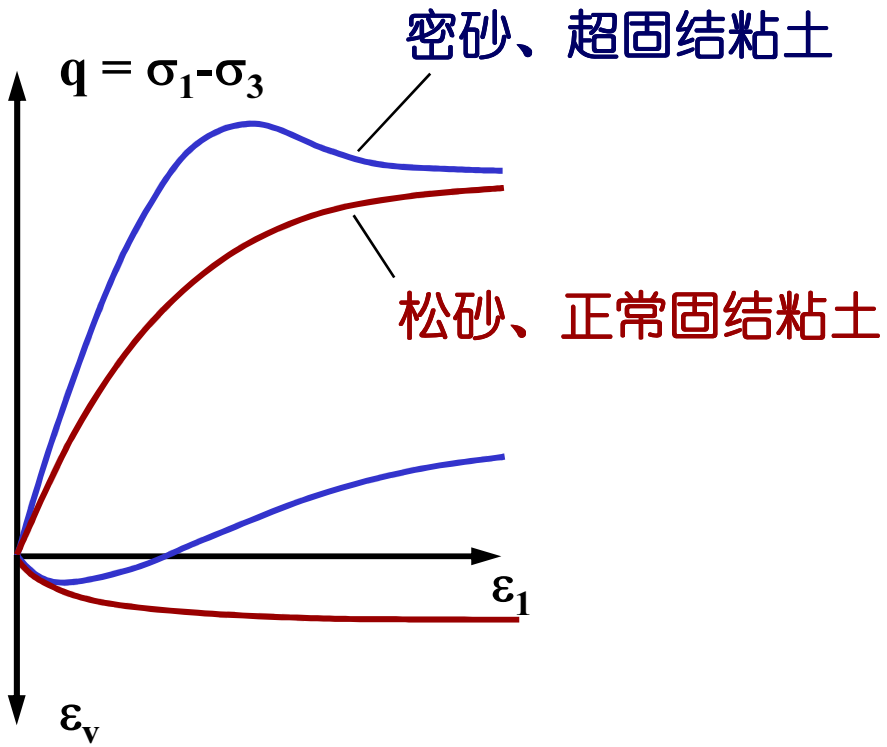
☞ 基本特性是指直接影响土应力应变关系的最根本的性质。它应该体现在最简单的饱和重塑正常固结粘土中，该种土的典型力学特性表现为：

- 非线性：应力应变关系从开始就不是线弹性的
- 压硬性：随平均应力p的增加而变密实，压缩模量提高
- 剪胀性：受广义剪应力q加载时伴有体积的变化
- 摩擦性：抗剪强度q_f随p的增加而增大，比值q_f/p保持常量

以上四种基本特性是土与其它材料的根本区别，直接控制土的应力应变关系

土的基本变形特性

☞ 土的应力应变关系通常从开始就不是线弹性的

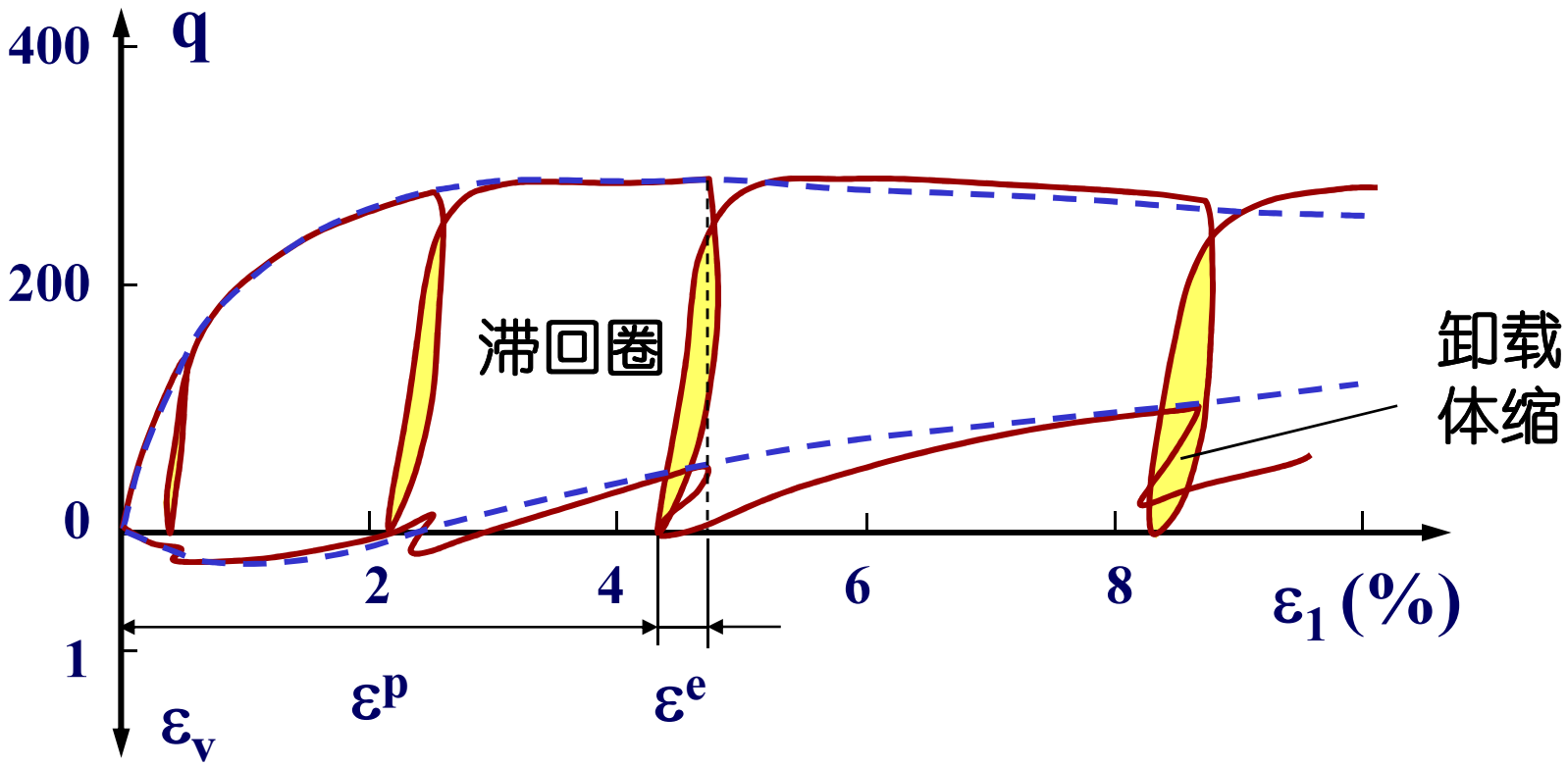


- 非线性
- 应变硬化
- 应变软化

土的基本变形特性– 非线性

P52
2.3.1

■ 弹塑性、滞回圈、卸载体缩



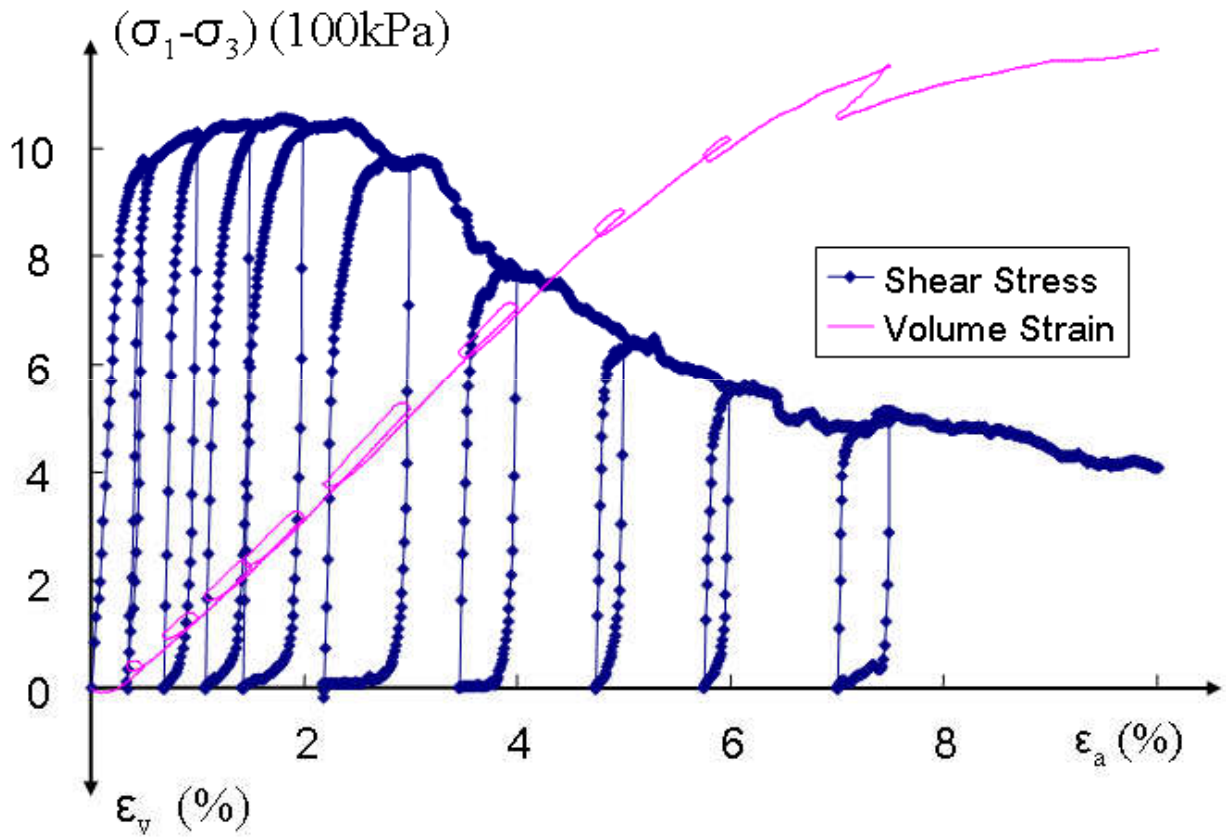
单调与循环加载的三轴试验曲线

（承德中密砂）

P53

2.3.3

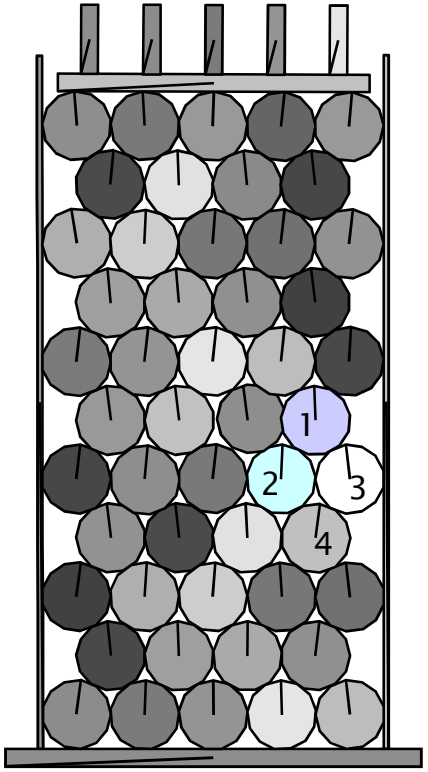
■ 滞回圈、应变软化和减载体缩（DDA模拟计算）

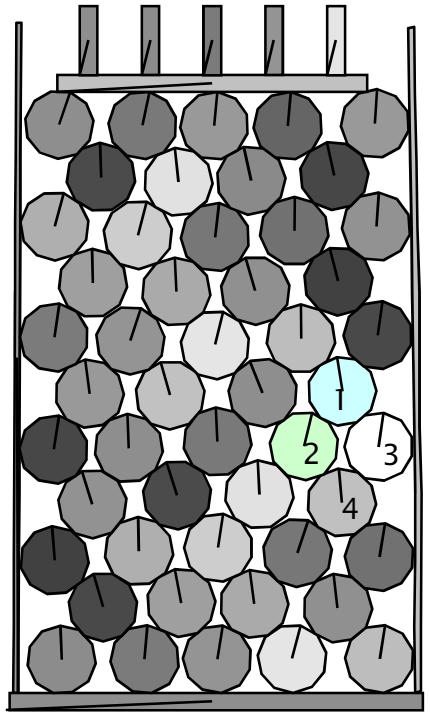


循环加载过程中的特性

DEL

■ 滞回圈、减载体缩（DDA模拟计算）





峰值状态

颗粒位置组合
处于最佳状态

残余状态

最佳状态遭破坏，
发生较大的侧胀

DEL

等向压缩试验结果

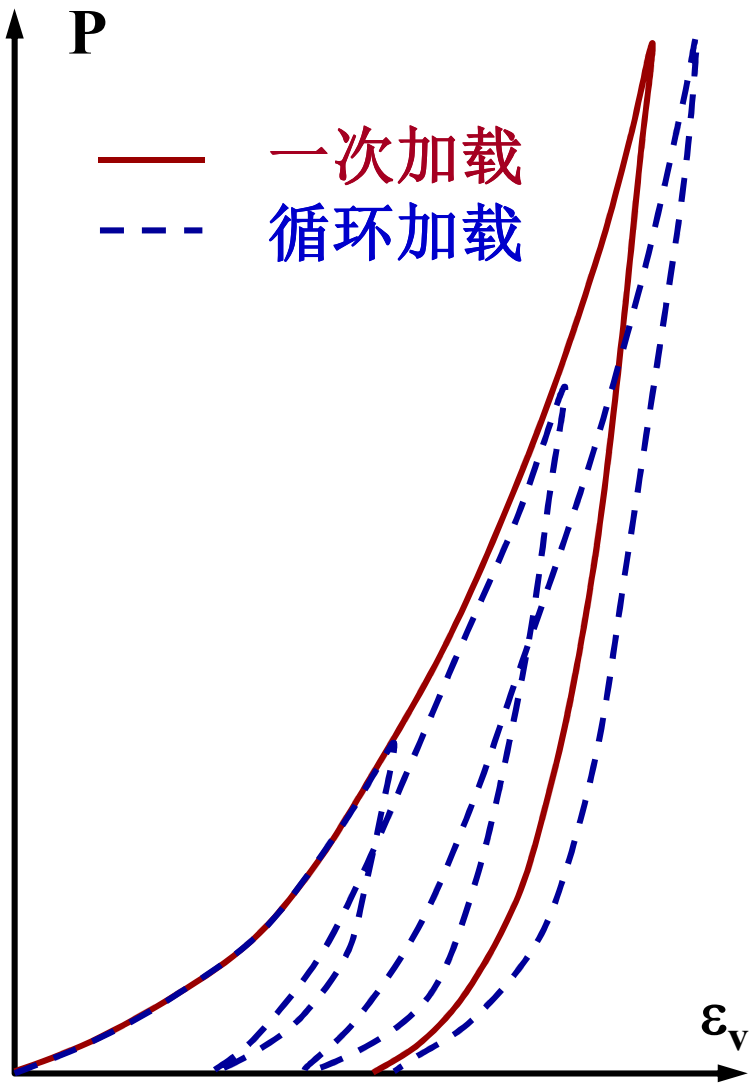
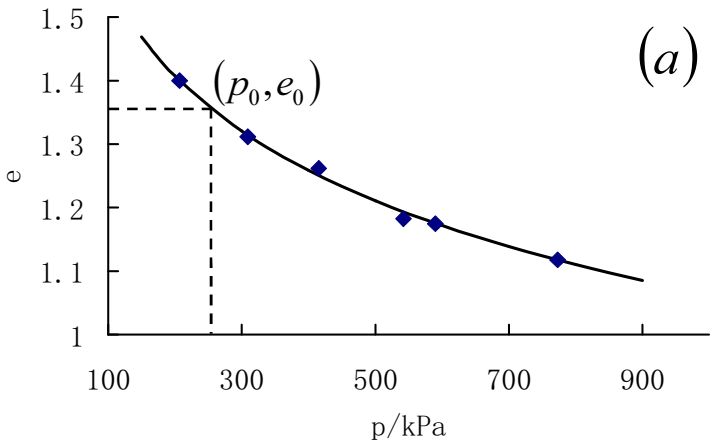
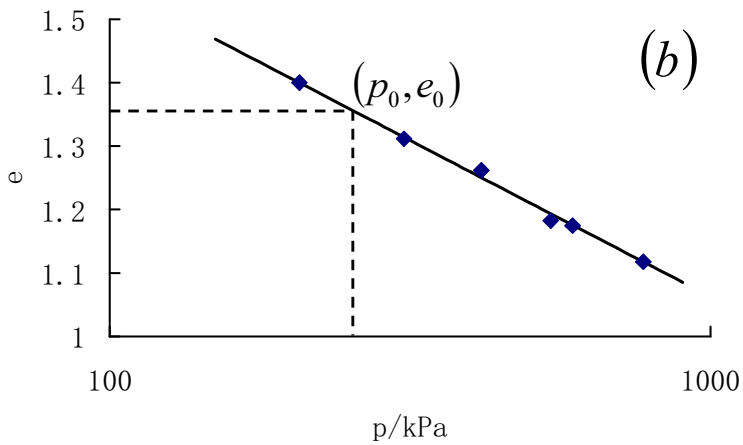


图2-8

P52

☞ 压硬性讲的是土在压缩过程中所表现出的模量随密度增加而增大的特性



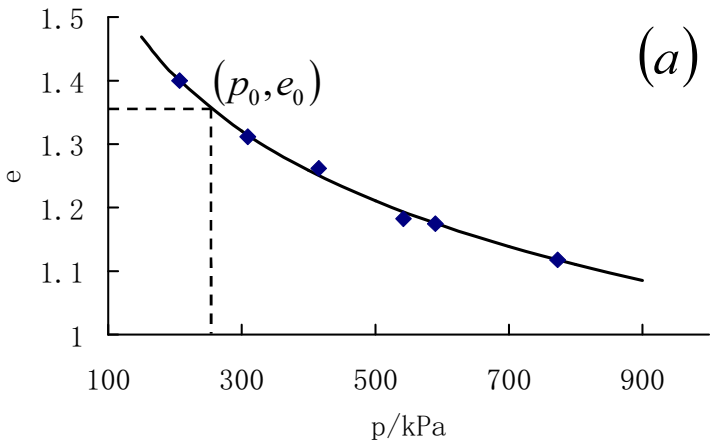


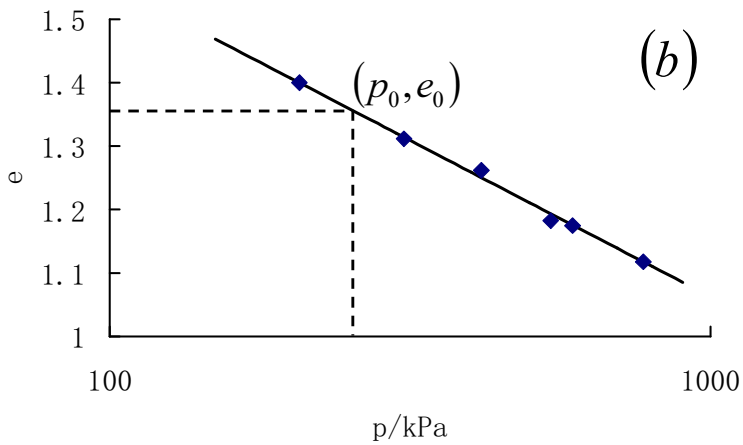
- 正常固结土等向压缩试验的抽象（Roscoe等，1963）

$$e = e_0 - \lambda \ln \frac{p}{p_0}$$

土的基本变形特性– 压硬性

☞ 压硬性讲的是土在压缩过程中所表现出的模量随密度增加而增大的特性



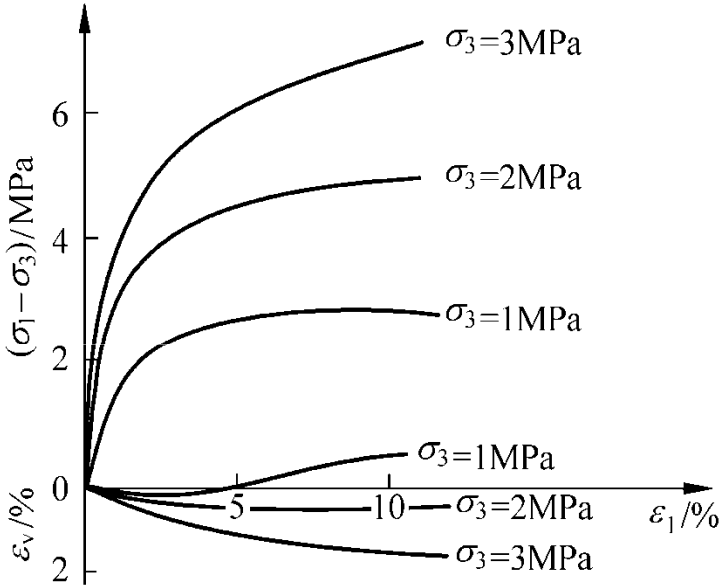


- 正常固结土等向压缩试验的抽象（Roscoe等，1963）

$$e = e_0 - \lambda \ln \frac{p}{p_0}$$

土的基本变形特性– 压硬性

☞ 压硬性讲的是土在压缩过程中所表现出的模量随密度增加而增大的特性



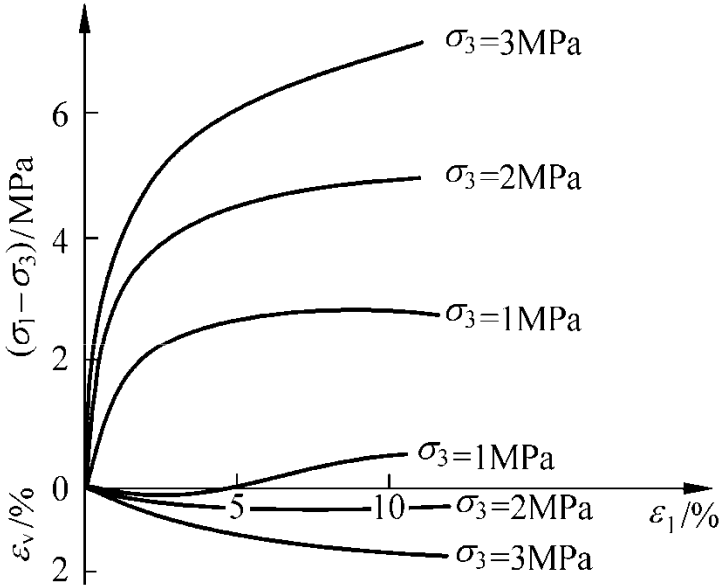
承德中密砂在不同围压下的三轴试验曲线

- 三轴应力应变曲线初始模量简布公式 （ Janbu，1963）

$$E_i = KP_a\left(\frac{\sigma_3}{P_a}\right)^n$$

土的基本变形特性- 压硬性

☞ 压硬性讲的是土在压缩过程中所表现出的模量随密度增加而增大的特性



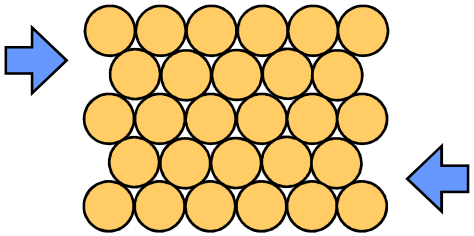
承德中密砂在不同围压下的三轴试验曲线

- 三轴应力应变曲线初始模量简布公式 （ Janbu，1963）

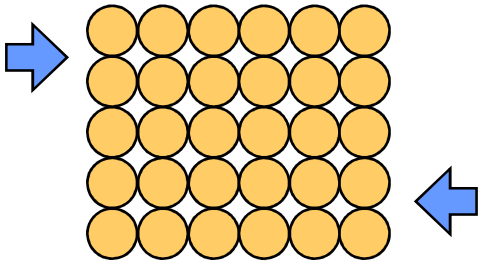
$$E_i = KP_a\left(\frac{\sigma_3}{P_a}\right)^n$$

土的基本变形特性- 压硬性

☞ 描述剪切过程中剪应力变化对体积应变产生的影响。也即，加载剪切过程中平均主应力p与广义剪应力q在产生应变上的相互耦合关系



剪胀模型

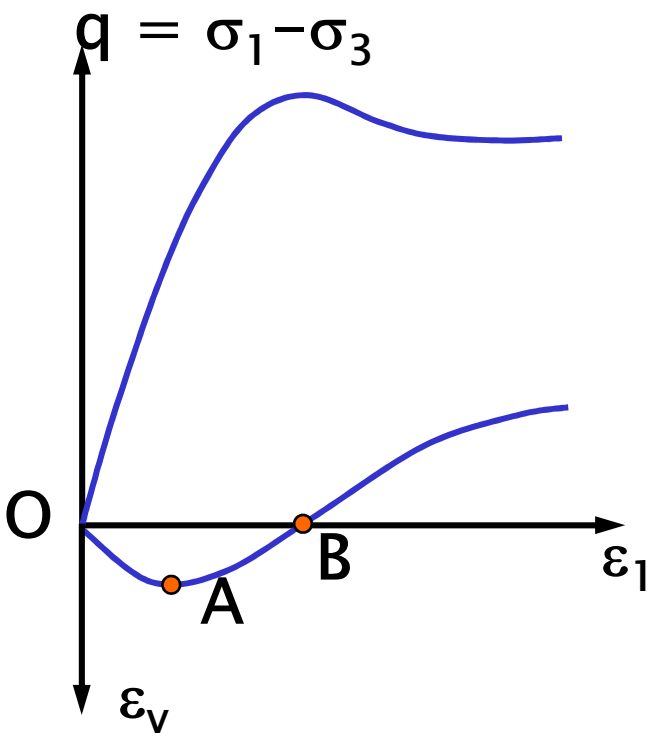


剪缩模型

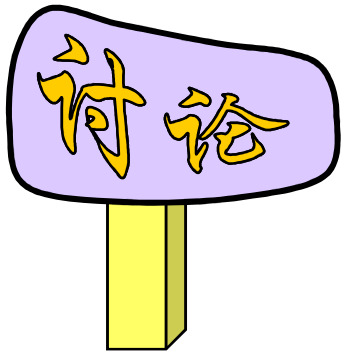
广义的剪胀性指剪切引起的体积变化，包括“剪胀”和“剪缩”。其实质是由剪应力引起土颗粒位置和排列变化，而使颗粒间的孔隙增大或减小，发生的体积变化

土的基本变形特性- 剪胀性

P52



左图为某种土料的常规固结排水压缩试验曲线，判断下列说法是否正确？



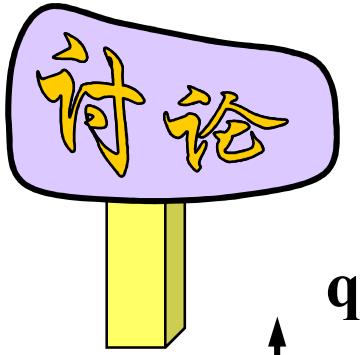
1）无论何种土总存在收缩段OA

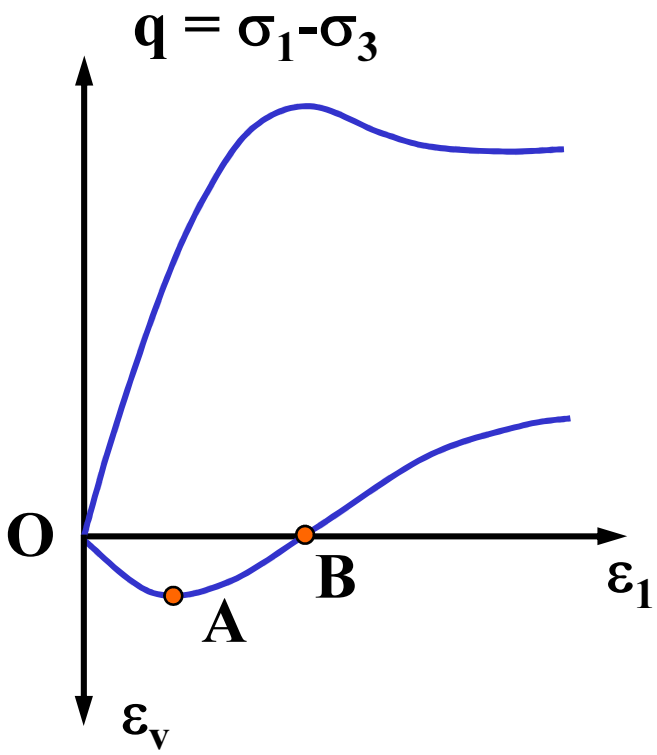
2）土样在OA段发生了剪缩

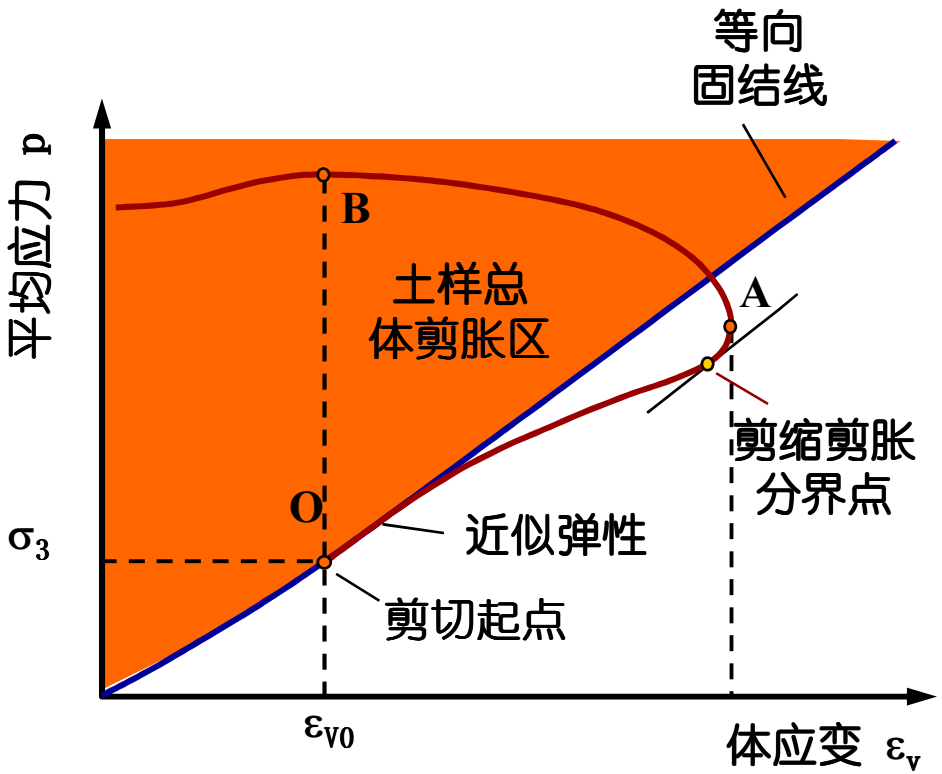
3）B点是土样总体剪缩和剪胀的分界点

4）在假定土体是弹性的前提下，由于剪应力不产生体积变化，所以此时应有$\varepsilon_v \equiv 0$

DEL

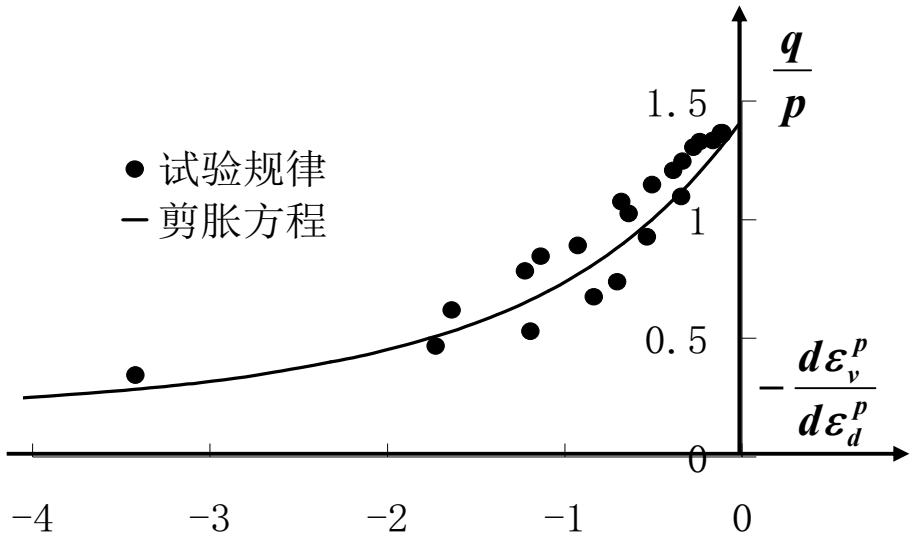

讨论


q = σ1-σ3
O
A
B
ε1
εv


等向
固结线
平均应力 p
B
土样总
体剪胀区
A
剪缩剪胀
分界点
O
σ3
近似弹性
剪切起点
εv0
体应变 εv

DEL

饱和重塑粘土应力比与塑性应变增量比的关系



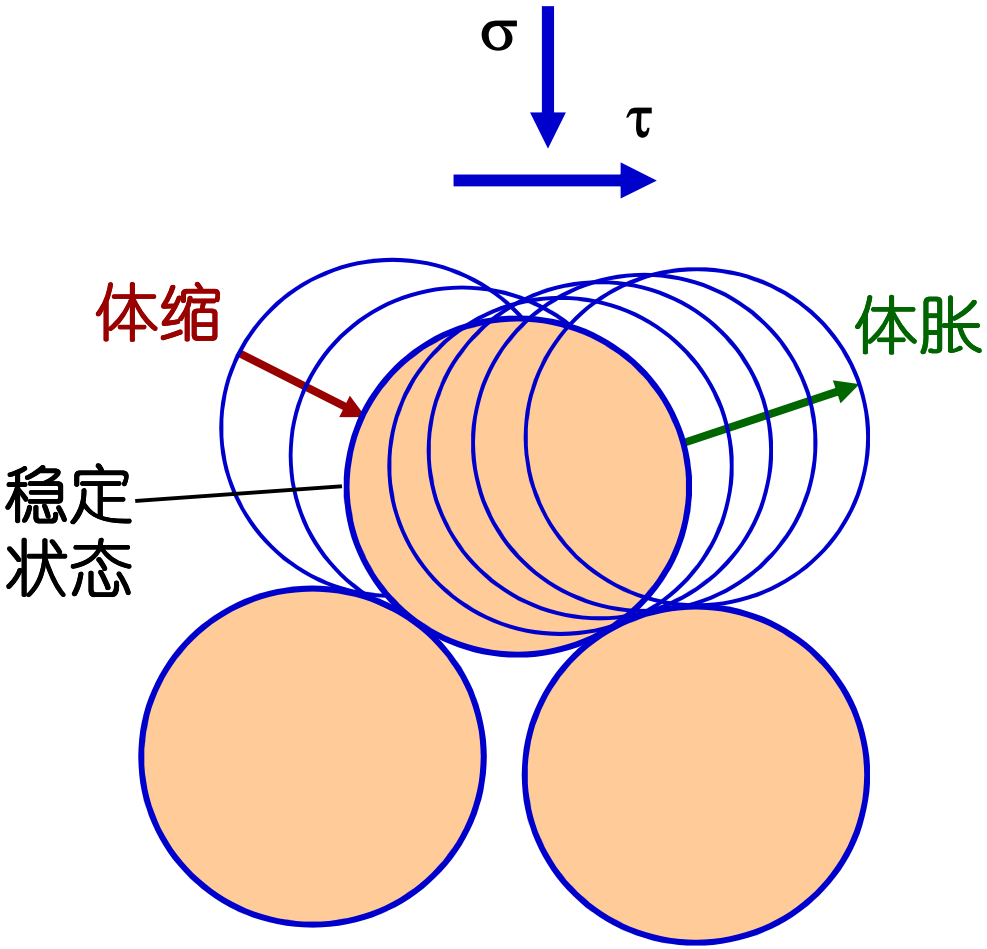
- Rowe的剪胀理论(1962)　$\frac{\delta\varepsilon_v^p}{\delta\varepsilon_1^p}=1-\frac{\sigma_1}{\sigma_3}\cdot\frac{1-\sin\phi_{cv}}{1+\sin\phi_{cv}}$
- 原始Cam-clay模型剪胀方程（ 1963 ）$\frac{d\varepsilon_v^p}{d\varepsilon_d^p}=M-\frac{q}{p}$
- 修正Cam-clay模型剪胀方程（1968）　$\frac{d\varepsilon_v^p}{d\varepsilon_d^p}=\frac{M^2-(q/p)^2}{2(q/p)}$

土的基本变形特性- 剪胀性

DEL

- 剪应力引起的体胀有恢复的趋势
- 剪应力引起的体积收缩是不可恢复的
- 各种形式的应力的重复总是引起体缩

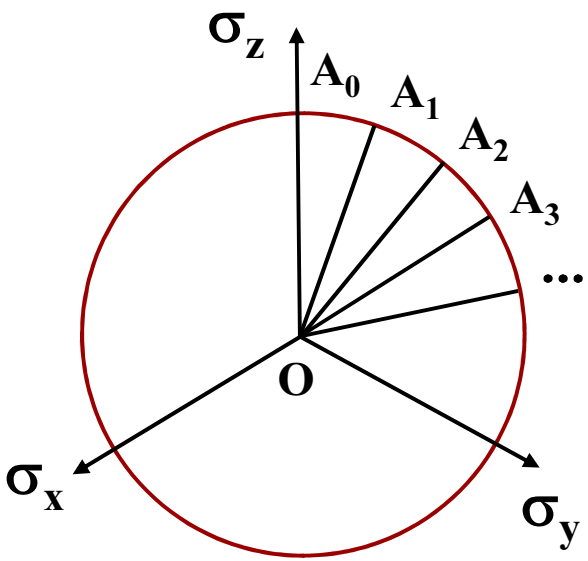
土的体积收缩趋势

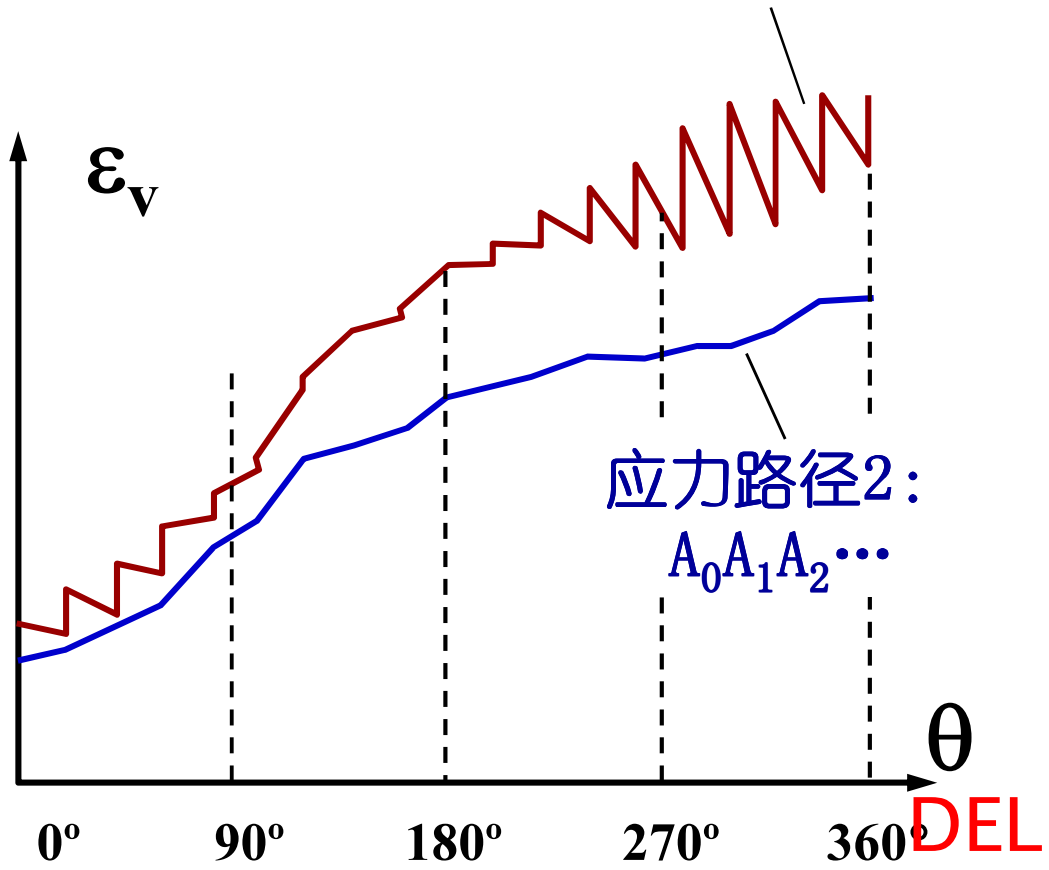


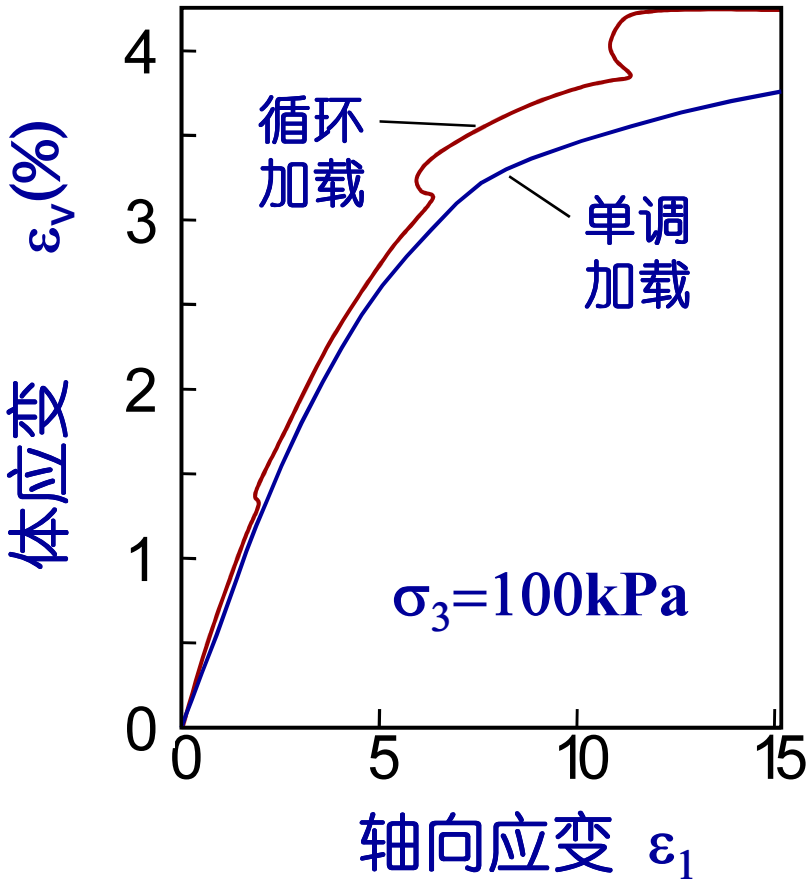
剪应力下颗粒的运动与体变

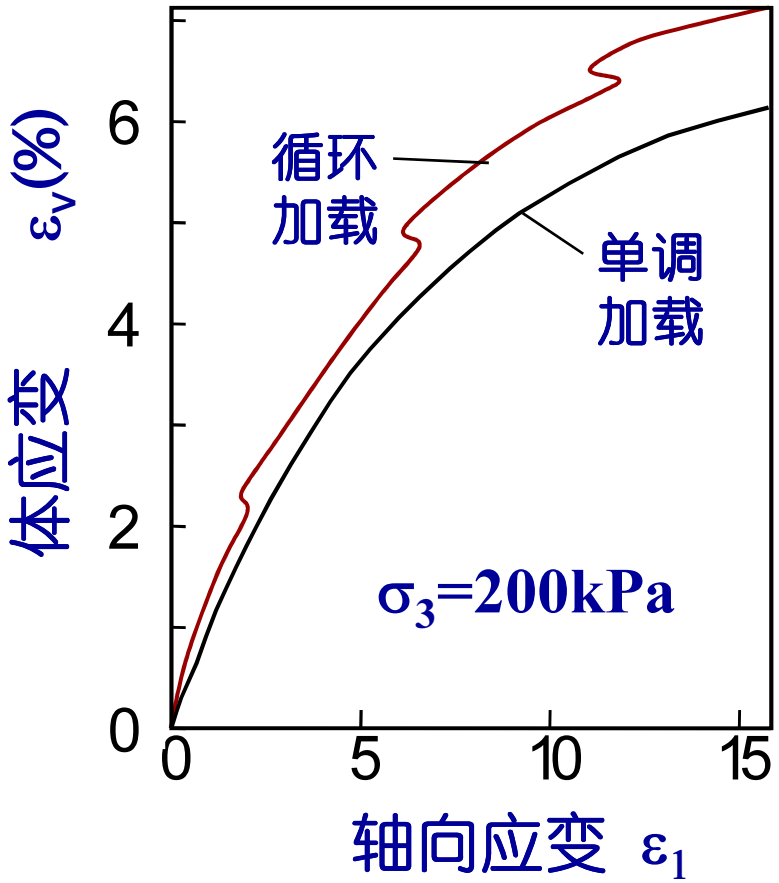
■ π平面上应力路径为圆周的试验

结果－体积连续收缩









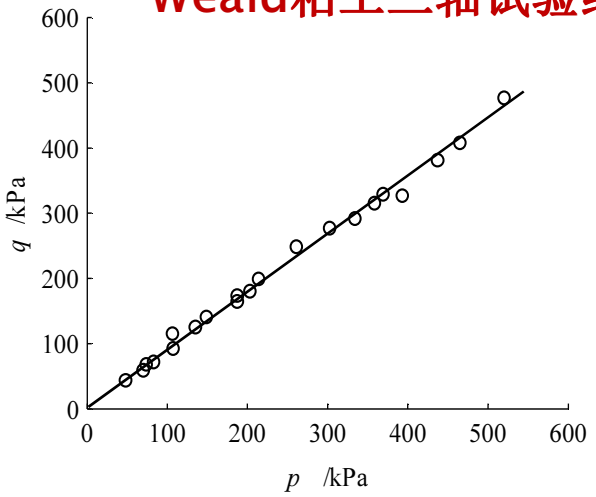
加载与减载均体积收缩

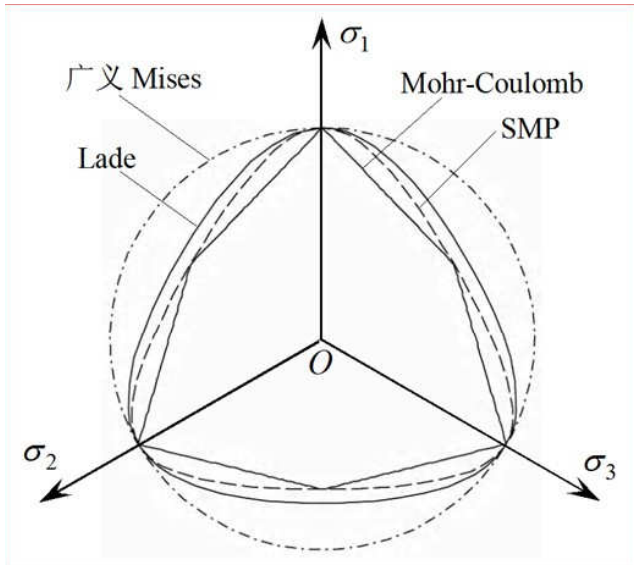
白河堡粘土的三轴试验结果

DEL

☞ 土是一种颗粒摩擦材料，抗剪强度q_f随p的增加而增大，比值q_f/p保持常量（正常固结土）

Weald粘土三轴试验结果





- 库仑公式（1773）　$\tau_f = c + \sigma \cdot \mathrm{tg}\phi$
- 正常固结粘土（Roscoe，1963）　$q_f = Mp$
- π平面上强度包线形状

土的基本变形特性– 摩擦性

DEL

■ 各向异性：指材料在不同方向上的物理力学性质不同

可分为初始各向异性和应力引起的各向异性

☞ 初始各向异性：常表现为横向各向同性

- 天然沉积：土体颗粒的结构性排列
- 不等向固结：水平应力≠垂直应力
- 室内实验室的制样

☞ 诱发各向异性：

是指土颗粒受到一定的应力发生应变后，其空间位置将发生变化，从而造成土的空间结构的改变

亚基本特性-各向异性和结构性

P53

2.3.4

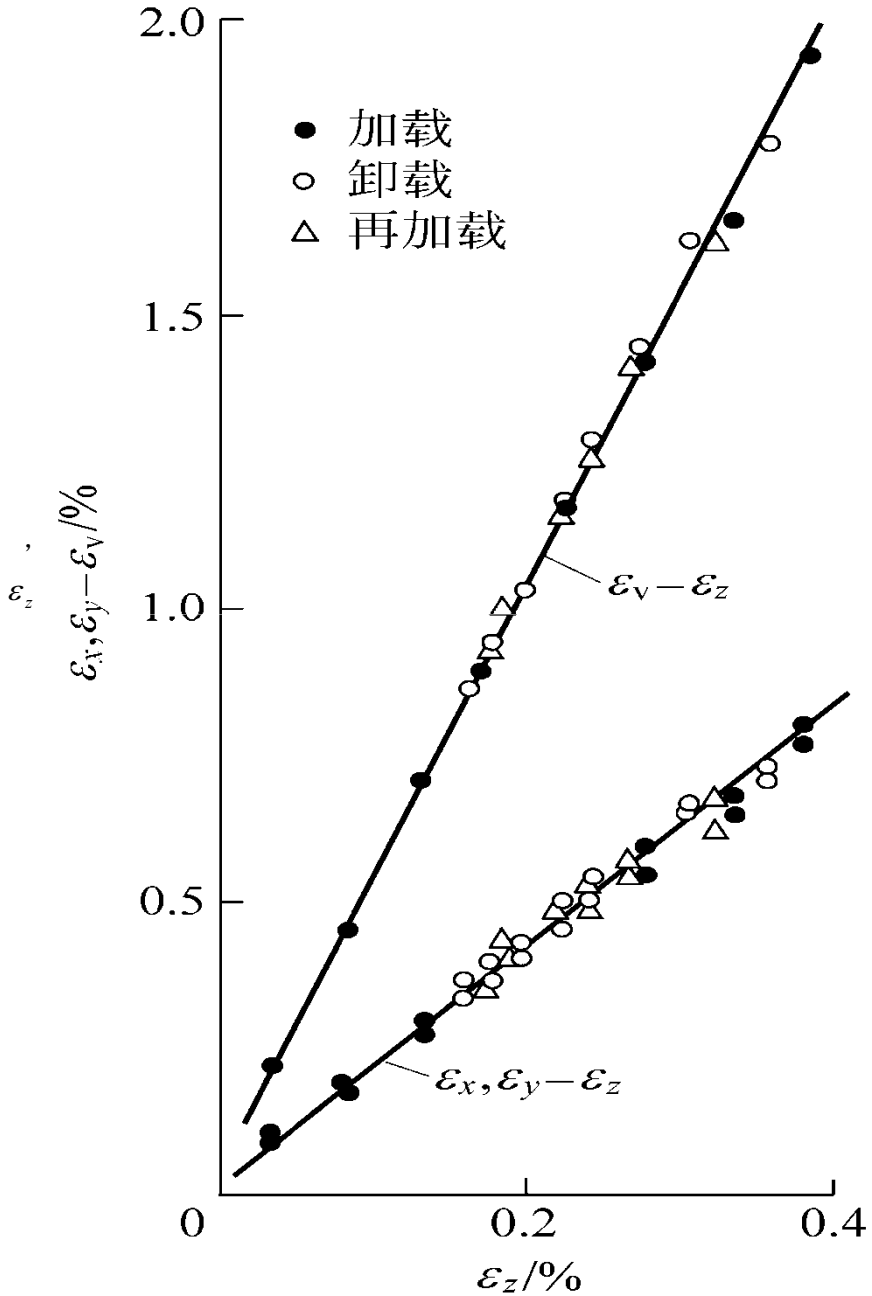


图2-10

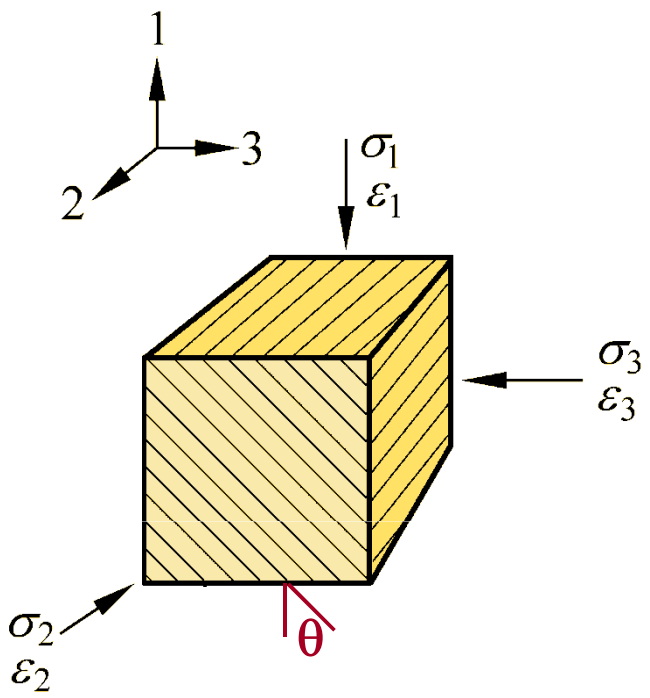
土的各向异性

用自由下落的小玻璃珠制成模拟“土”试样各向等压试验的结果

$$\varepsilon_x=\varepsilon_y=2.2\varepsilon_z$$

$$\varepsilon_v=5.4\varepsilon_z$$

P54



撒砂雨法制样沉积面方向角

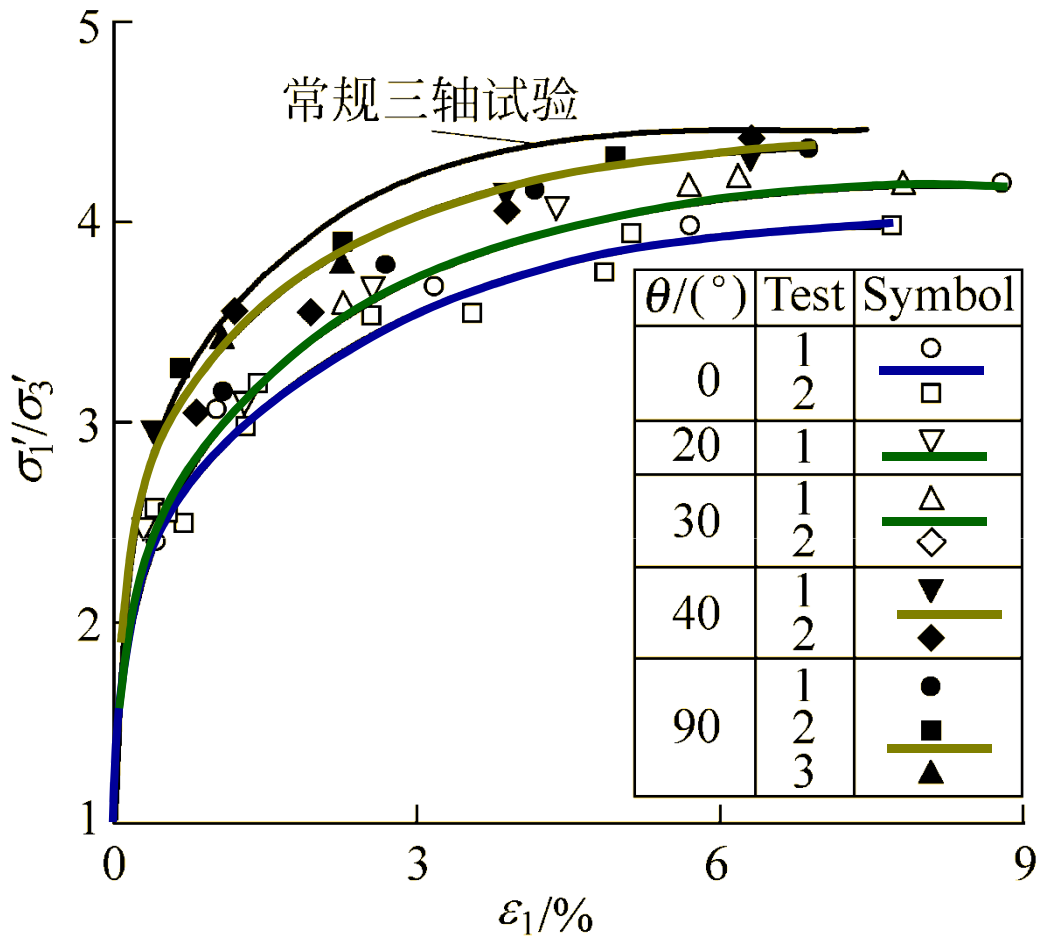
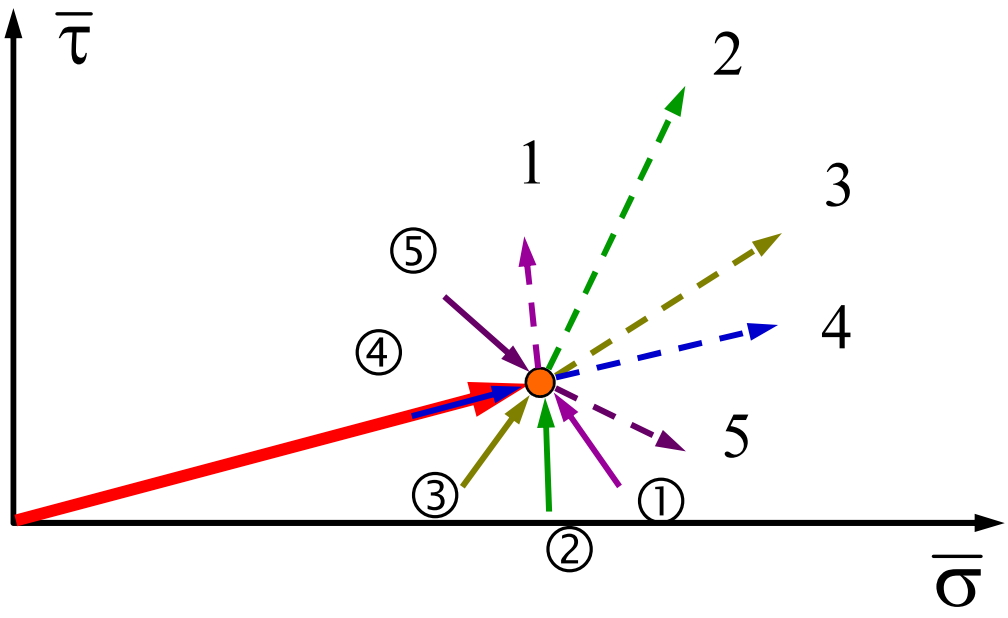


图2-11

砂土的各向异性

P54



正常固结粘土试验结果

图2-12

☞ 试样首先等比固结

$$\bar{\tau}=\frac{(\sigma_1-\sigma_3)}{2}=14.2\text{kPa}$$

$$\bar{\sigma}=\frac{(\sigma_1+\sigma_3)}{2}=90\text{kPa}$$

☞ 然后在五个方向施加相同的应力增量，量测应变增量

土的各向异性

P55

- 土中颗粒的组成，土颗粒的排列与组合，颗粒间的作用力构成了土的不同的结构。它们对土的强度、渗透性和应力应变关系特性有极大影响

☞ 组构（fabric）：颗粒、粒组和孔隙的几何排列方式

☞ 结构（structure）：由于土的组成成分、空间排列和粒间的作用力表现出的综合特性

☞ 结构性：由于土的结构造成的力学特性（强度、渗透性、变形）

☞ 结构性强弱：结构对于土力学性质影响的强烈程度

亚基本特性 – 土的结构性

P53

2.3.4

- 原状土：风化、搬运、沉积、固结及漫长时间中的地质作用，与周围环境的相互作用－较强的结构性
- 重塑土：结构性比较弱
- 土力学的基本原理－主要建立在重塑土的室内试验基础上

土的结构性

P55
2.3.4

☞ 主要由于颗粒间的排列：

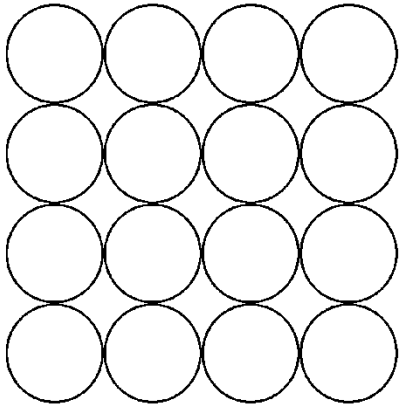
咬合、定向、胶结

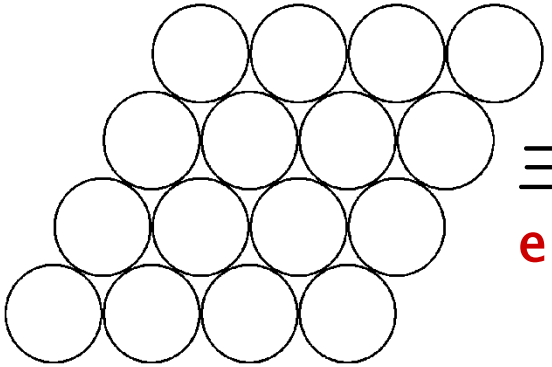
使得粗粒土在密度、渗透性、强度、压缩性、各向异性等方面表现出很大的差异

粗粒土的结构性

DEL

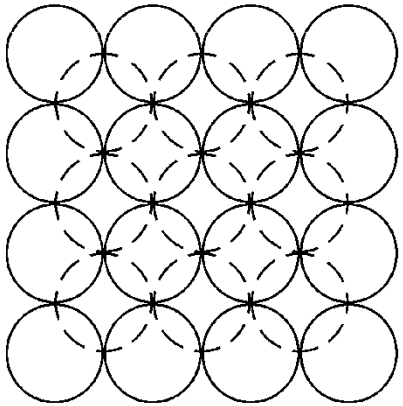
立方体
e=0.91

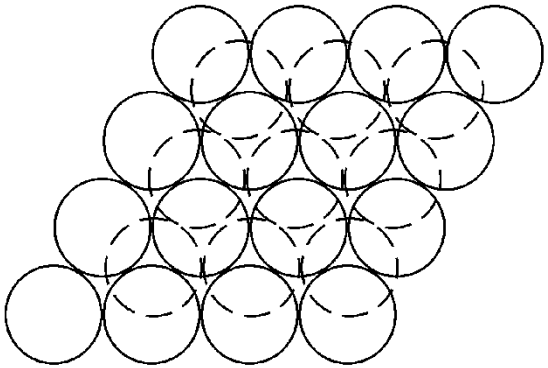




三角形＋正方形
e=0.65

金字塔
e=0.34



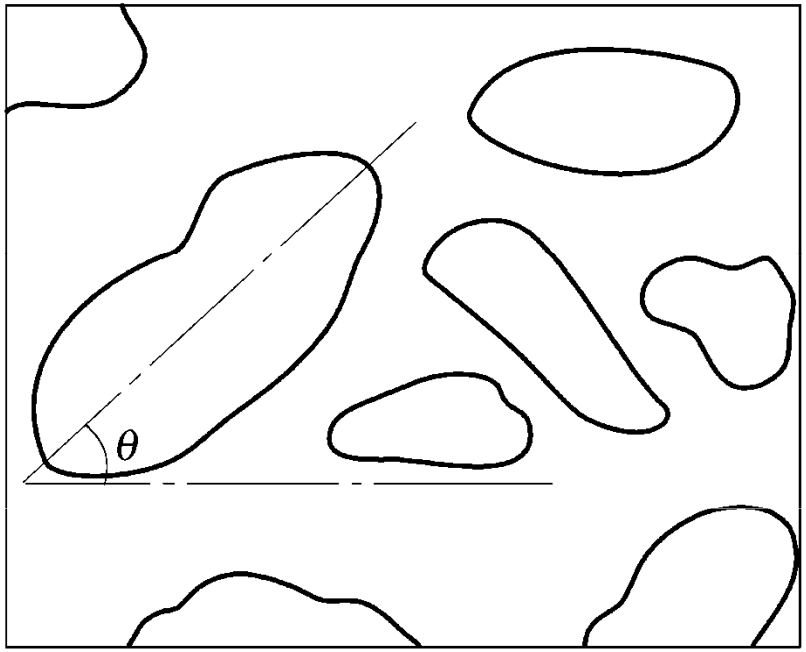


四面体
e=0.34

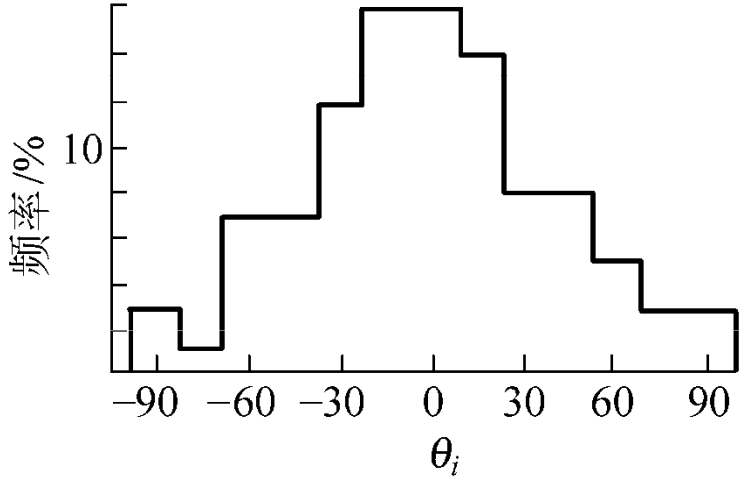
均匀圆球“土”的颗粒排列

DEL

轻轻敲击圆筒形刚性制样模制样



在垂直面上颗粒的方向特性

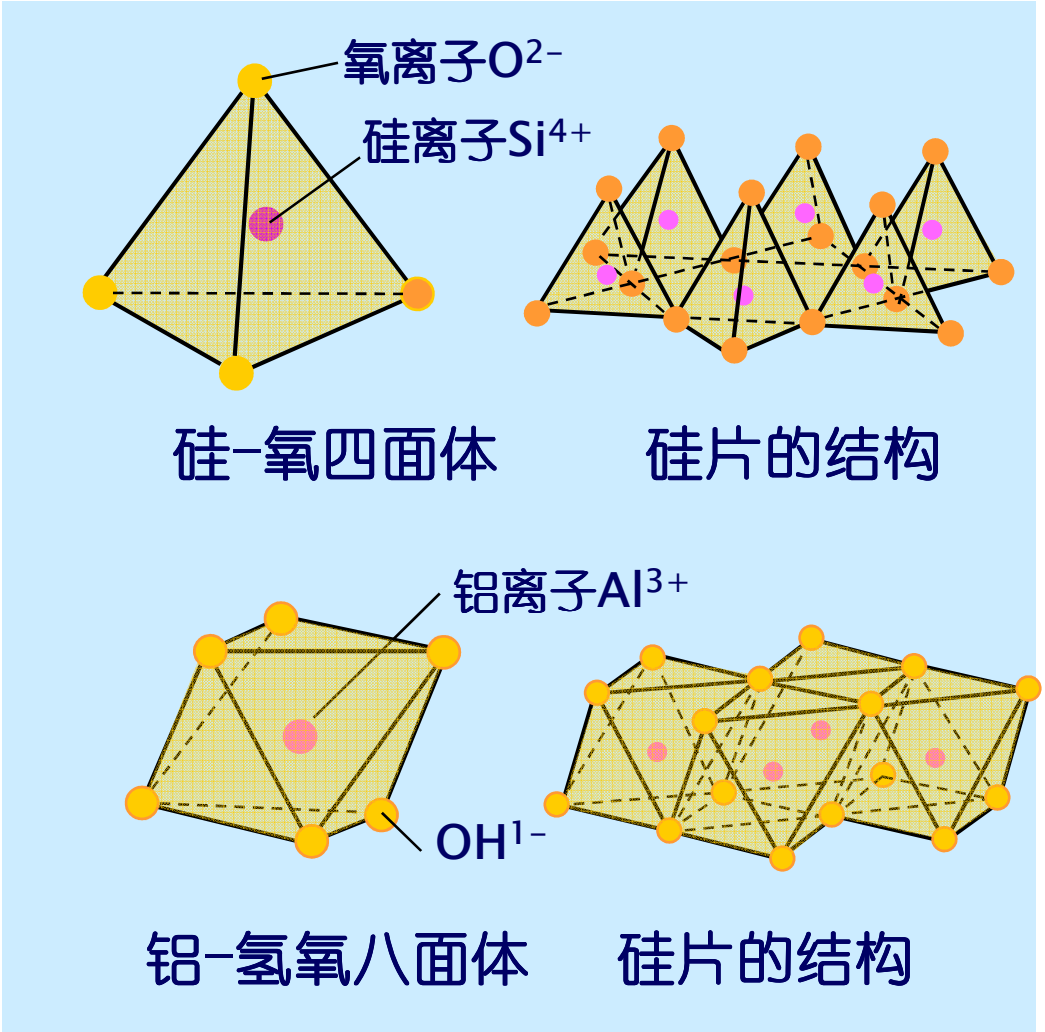


在垂直面上θ的分布频率

颗粒长宽比＝1.64，定向作用造成土的各向异性

DEL

- D<5μm(0.005mm)
- 粘土矿物：
  - 高岭石
  - 伊利石
  - 蒙特石
- 基本构成单元：
  - 硅氧四面体
  - 铝氢氧八面体

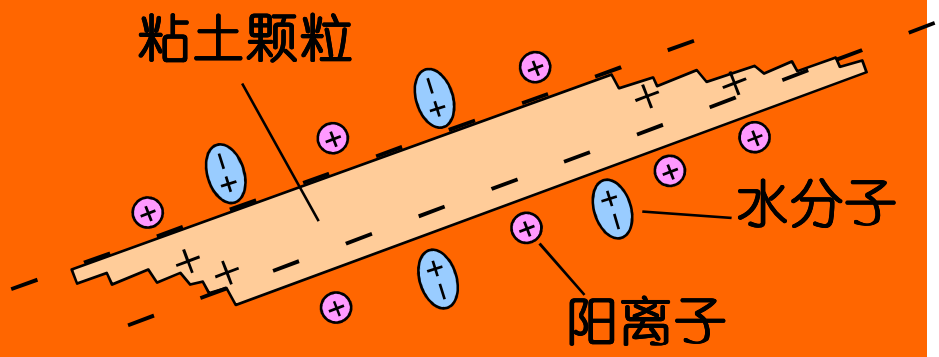


粘土矿物成分及构成

DEL

粘土矿物的带电性质

研究表明，片状粘土颗粒表面常带有电荷，净电荷通常为负电荷



- 由于结构连续性受到破坏，使粘土表面带净负电荷，（边角带正电荷）
- 四面体中的硅、八面体中的铝被低价离子置换
- 存在于碱性溶液中，土表面的氢氧基离解变成氢，带正电荷

粘土矿物表面的负电荷

DEL

- 粘土颗粒细小，且呈片状，比表面积很大
- 粘土颗粒与水分子均存在不平衡电荷分布，且土中水一般存在大量的离子
- 使得粘土颗粒与水之间作用力十分显著，往往与重力处于相同量级

- 水土间的静电引力
- 土颗粒表面通过阳离子与极化水分子间的引力
- 由于离子浓度不同产生的渗析引力
- 由于极化分子间产生的范德华力等

粘土颗粒与水的相互作用—双电层

DEL

- 带负电的粘土片状颗粒在其周围形成电场，周围水分子偶极子、阳离子因静电引力而被吸附在粘土颗粒表面，离表面愈近，吸附力愈大
- 带有负电荷的粘土片状颗粒和周围的水分子、阳离子云等组成的扩散层被称为扩散双电层，简称双电层
- 双电层之外的孔隙水视为自由水。双电层之内的水称为结合水或薄膜水，它具有许多与一般水不同的性质

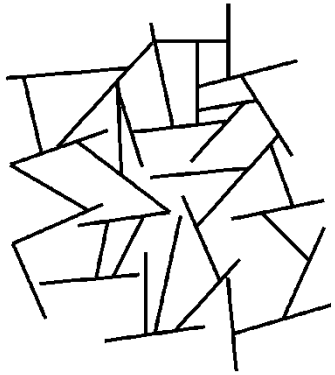
粘土颗粒与水的相互作用

DEL

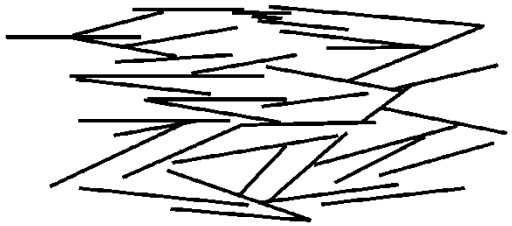
- 静电力（库仑力）：面－角相吸
- 范德华力（分子键）偶极子及诱发的偶极子间吸引
- 通过离子起作用的静电力
- 结晶与胶结（化学键）
- 渗透斥力：两粘土颗粒间水离子浓度高，渗压（高）于自由水，使颗粒排斥

颗粒间的作用力与粘土的结构性

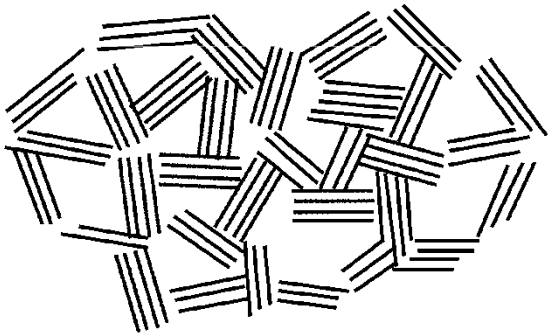
DEL



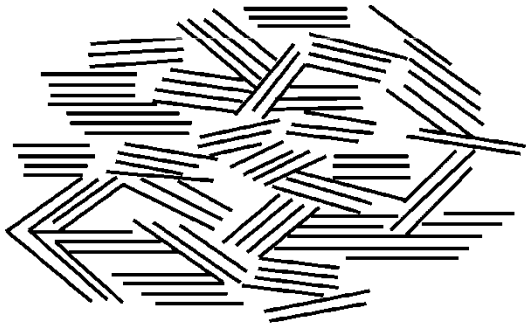
单片絮凝结构



单片分散结构



片组絮凝结构

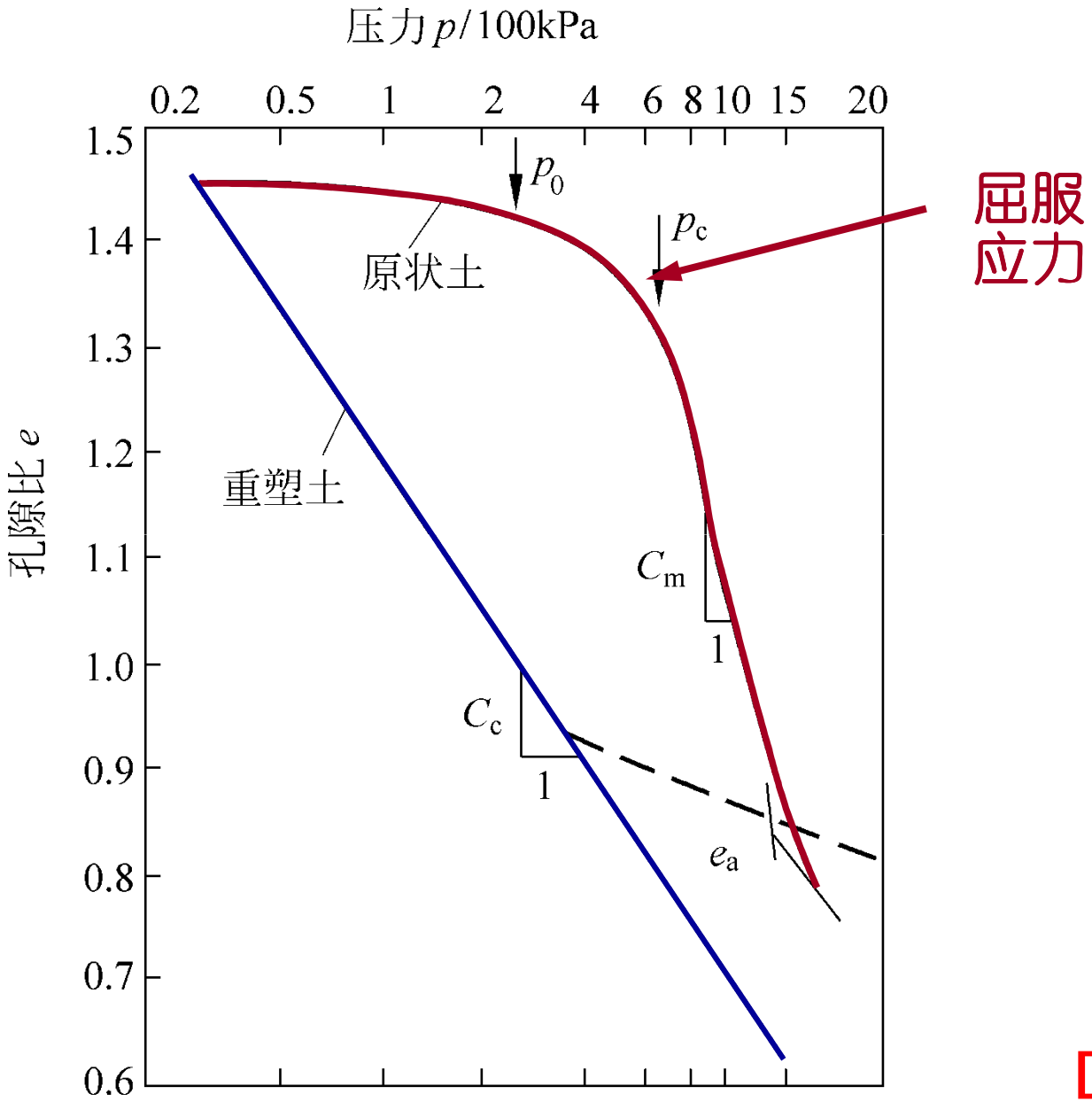


片组分散结构

粘土的几种结构形式

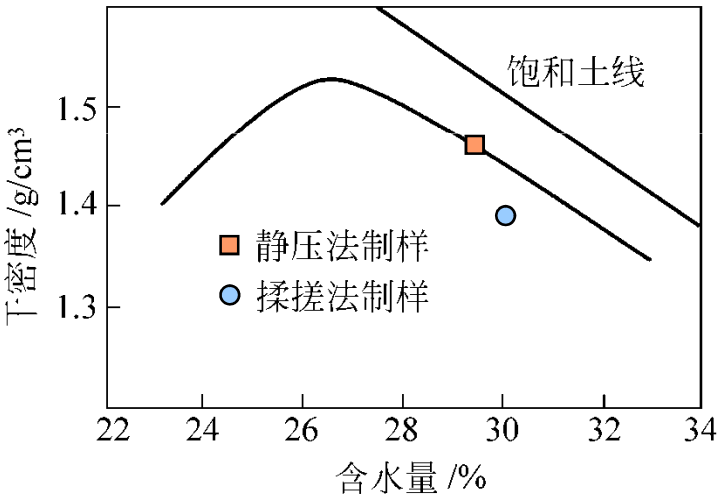
DEL

土的压缩试验

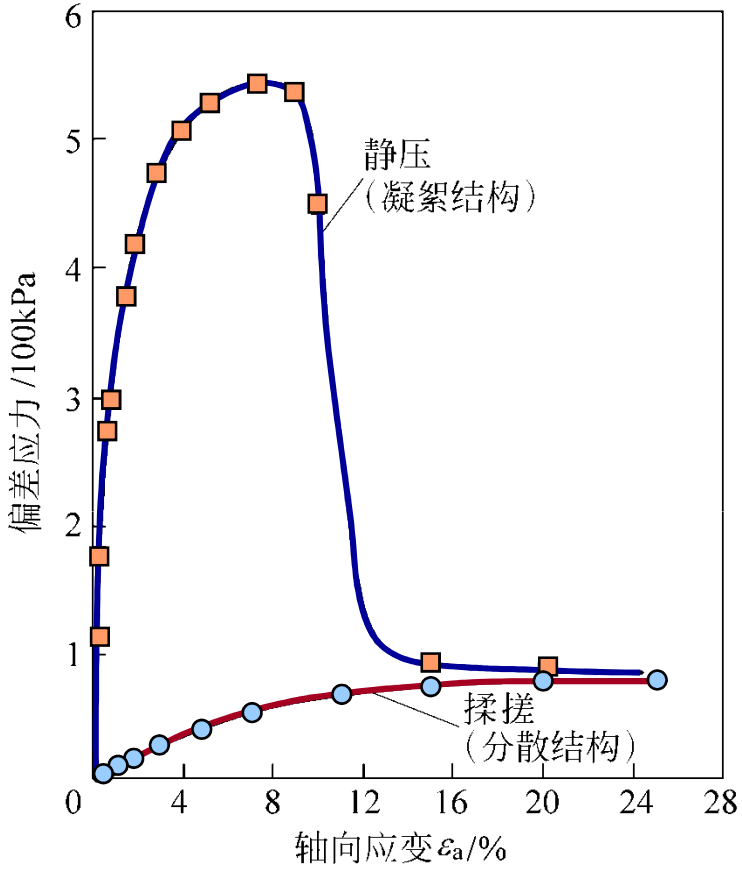

压力 p/100kPa
0.2
0.5
1
2
4
6
8
10
15
20
1.5
1.4
1.3
1.2
1.1
1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
孔隙比 e
p0
pc
原状土
重塑土
Cm
1
Cc
1
ea
屈服应力

DEL

压实粘土无侧限压缩试验



(a)



(b)

不同制样方法的影响

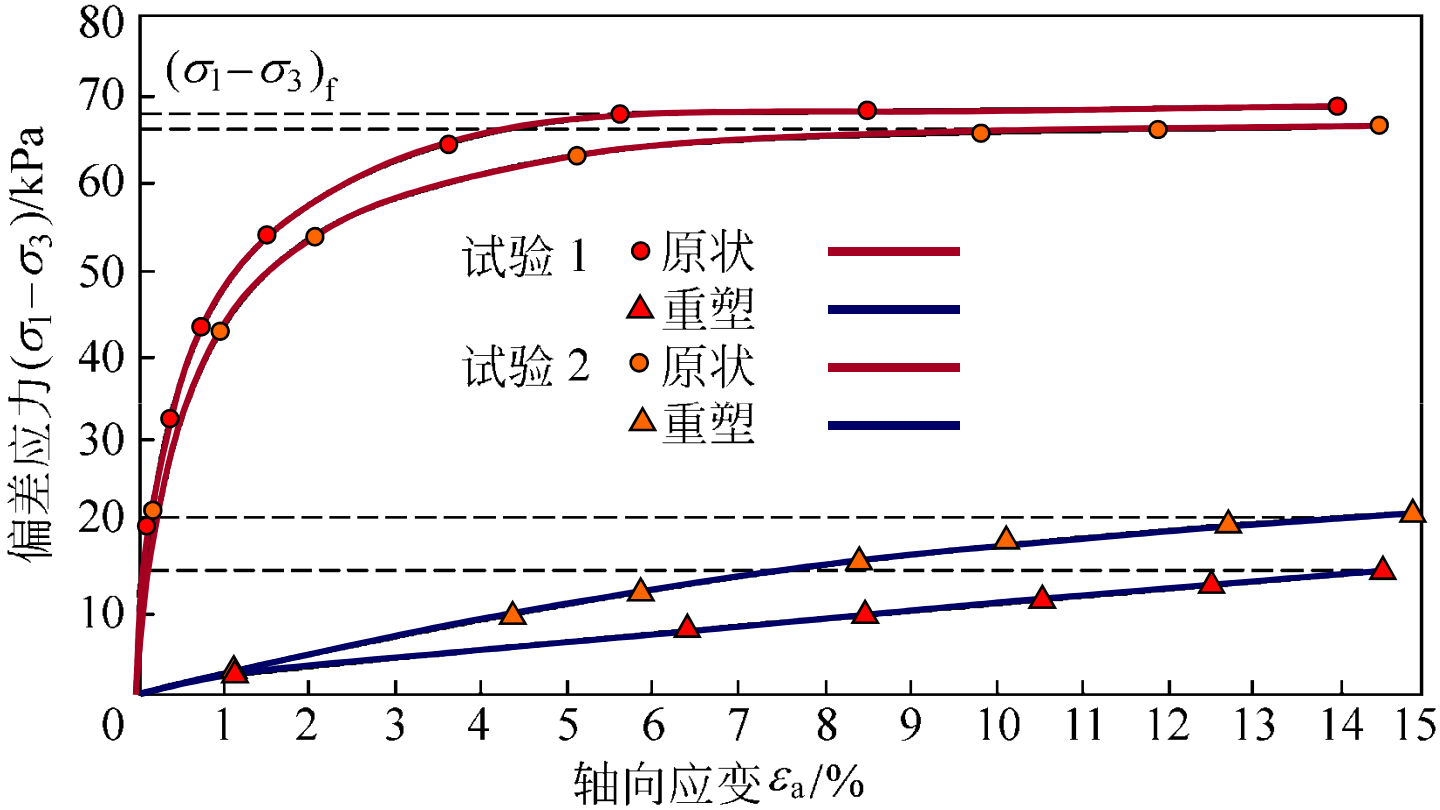
DEL

- 首先将原状不扰动土样从地层中取出，在三轴压力室中施加围压 p=80kPa (不固结）以平衡原位应力，进行不排水试验直到破坏
- 然后拆开三轴压力室，取出试样，在橡皮膜中就地进行重塑，再重装压力室
- 仍然施加围压p=80kPa（不固结），再进行不排水试验

旧金山海滨淤泥土的原状与扰动土的不排水试验

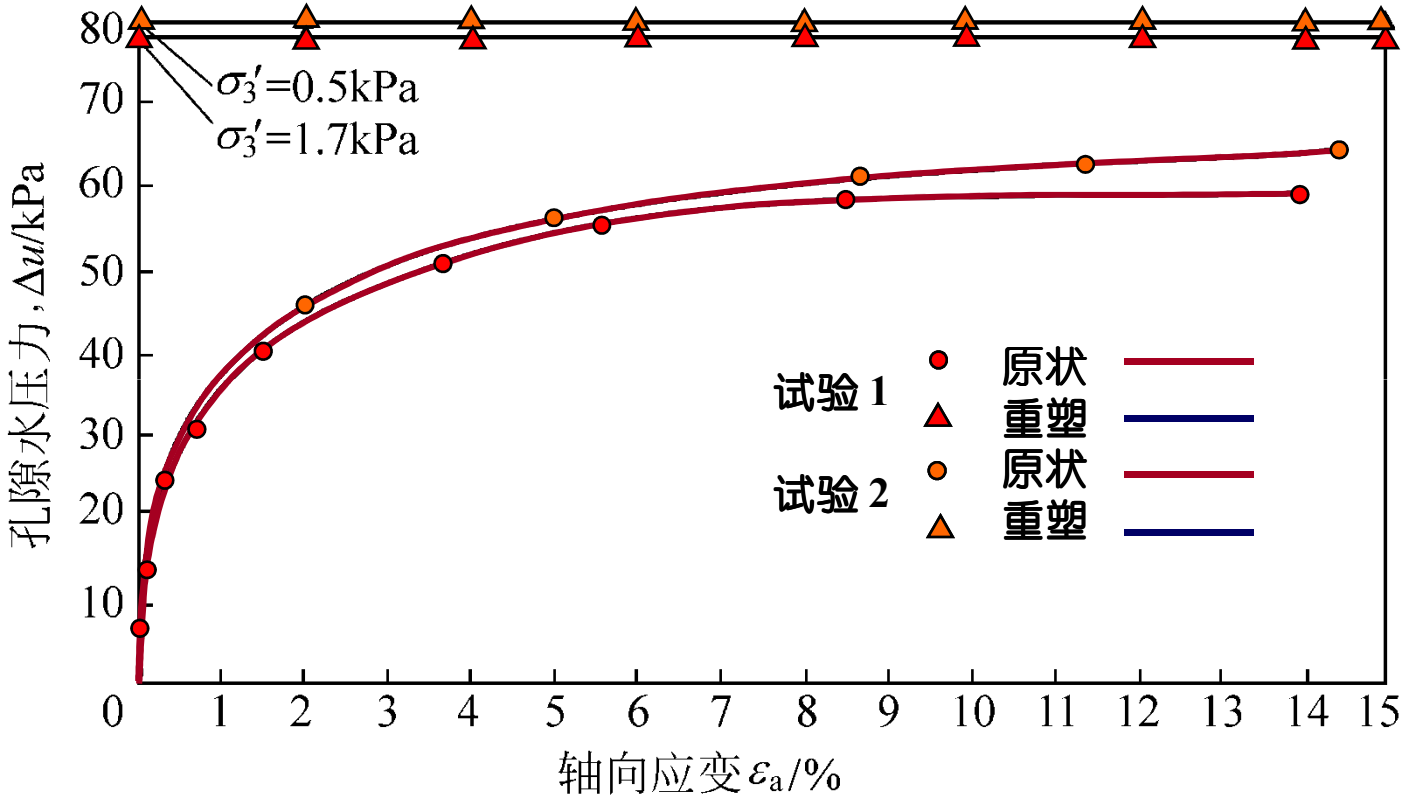
DEL

■ 应力应变关系



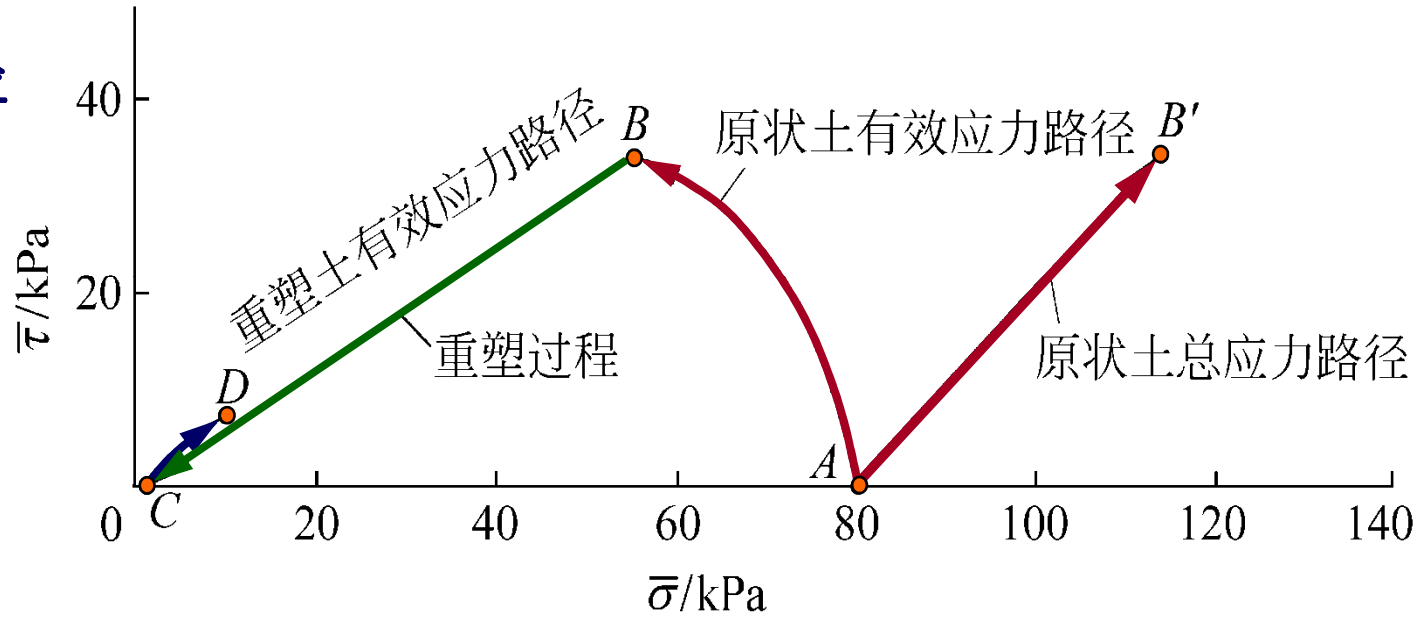
旧金山海滨淤泥土不排水试验DEL

■ 孔隙水压力



旧金山海滨淤泥土不排水试验DEL

■ 应力路径



☞ 由不排水强度计算的敏感度分别为4.5和3.1。这种差别主要是由于二者的有效应力不同。由于扰动土的结构破坏，使试样内超静孔压大大增加，有效应力降低。

旧金山海滨淤泥土不排水试验

DEL

- 土的应力、变形、强度性质以及状态量等随时间而变化的性质。主要表现为蠕变、应力松弛、应变率效应及长期强度随时间变化等现象
- 蠕变指在应力状态不变的条件下，应变随时间逐渐增长的现象；应力松弛是指维持应变不变，材料内的应力随时间逐渐减小的现象

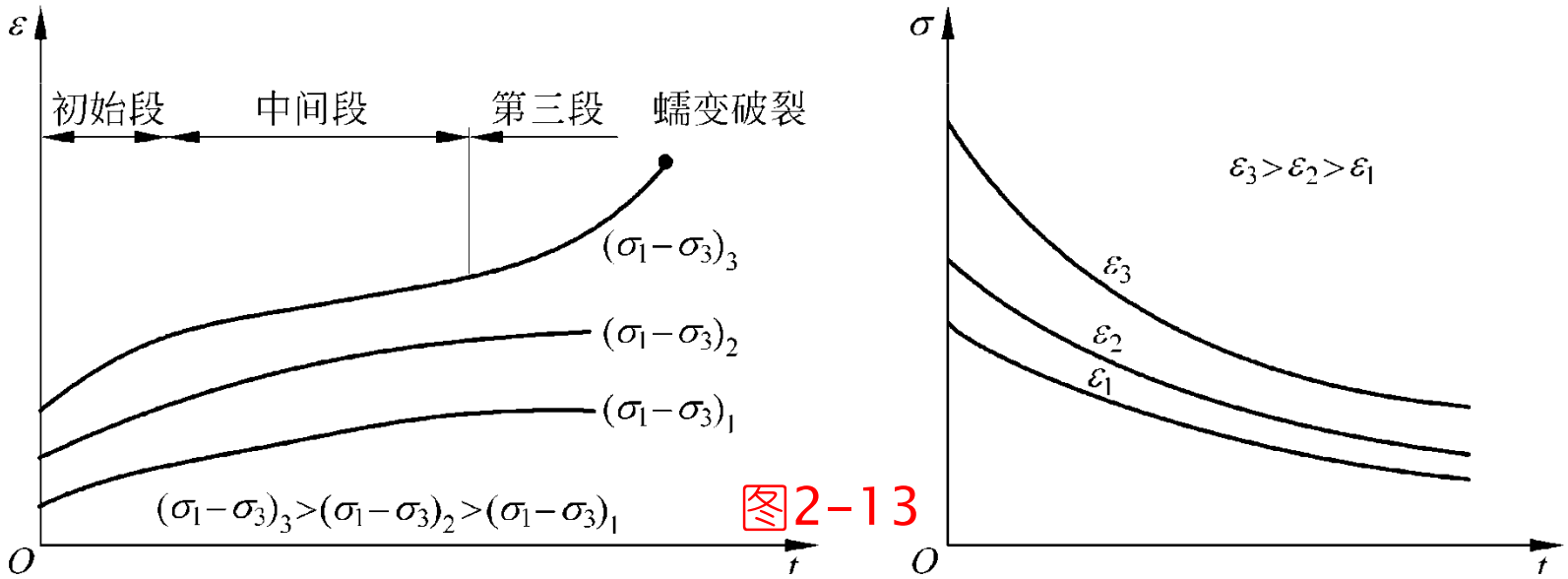
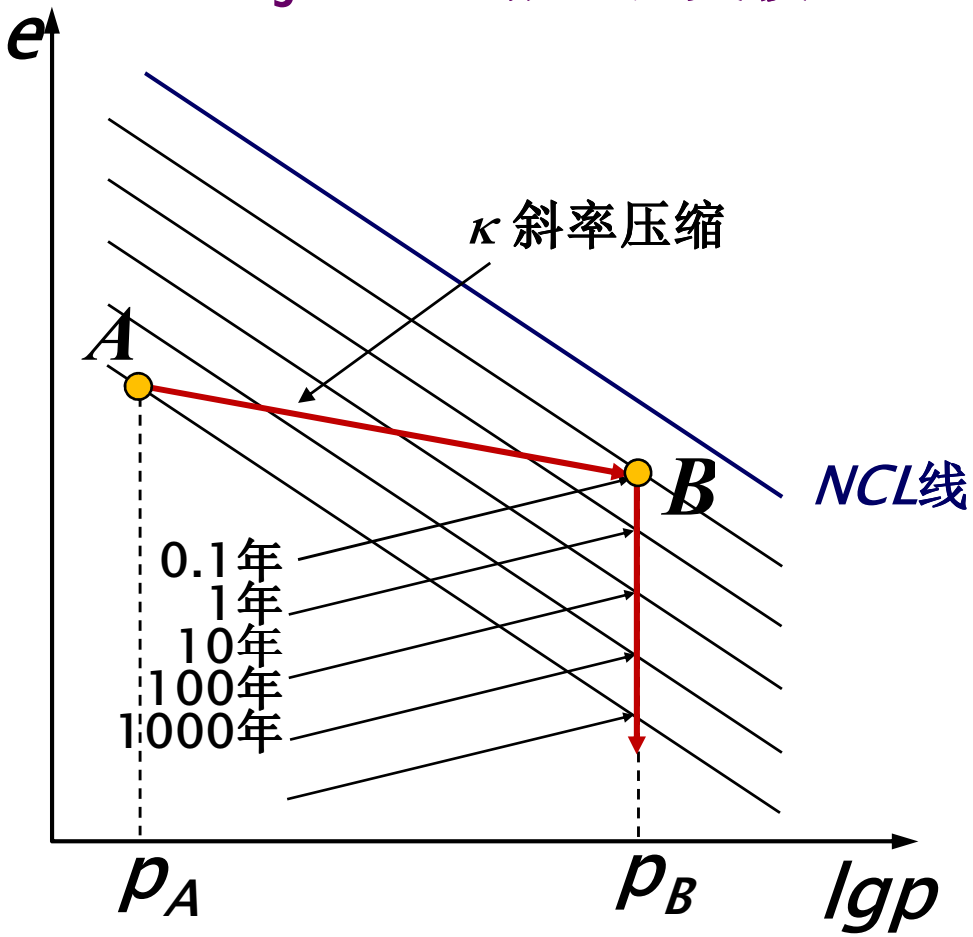


图2-13

亚基本变形特性-流变性P55 2.3.5

- 观点一：流变在主固结完成后再发生。可采用基于次固结试验建立相关的经验公式进行叠加计算分析
- 观点二：主固结阶段同时伴有流变。土体受荷之后便会立即同时产生主、次固结变形。主要基于元件流变模型、弹粘塑性理论等进行研究

Bjurrum黏土流变模型



黏性土流变特性

P55

☞ 亚基本特性通过影响基本特性的发展演化规律，作用于土的应力应变关系：

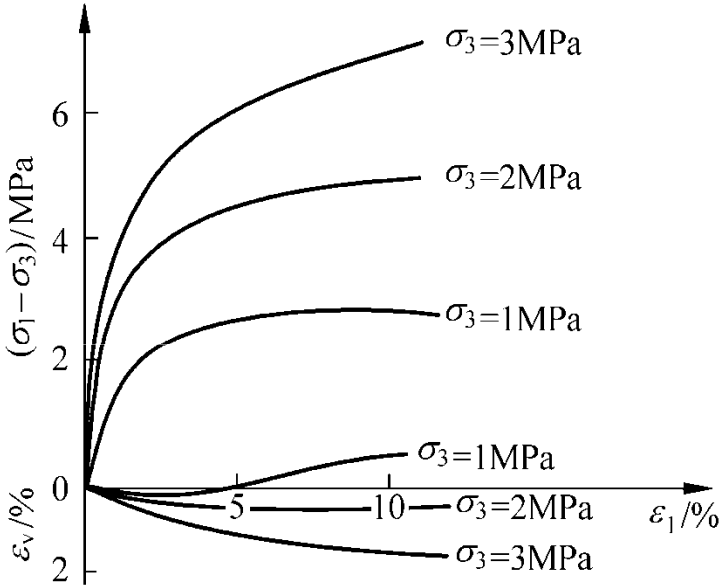
土的亚基本特性包括应力历史依存性、应力路径依存性、各向异性、结构性、蠕变特性、颗粒破碎特性和温度特性等

土的亚基本变形特性

影响土应力应变关系的应力条件

P56
2.3.6

☞ 压硬性讲的是土在压缩过程中所表现出的模量随密度增加而增大的特性



承德中密砂在不同围压下的三轴试验曲线

- 三轴应力应变曲线初始模量简布公式 （ Janbu，1963）

$$E_i = KP_a\left(\frac{\sigma_3}{P_a}\right)^n$$ 式2-49

土的基本变形特性- 压硬性

应力水平

☞ 应力路径相关性表现为应变发展受制于约束压力p与广义剪应力q加载顺序的影响

Monterey松砂的两种应力路径的三轴试验结果

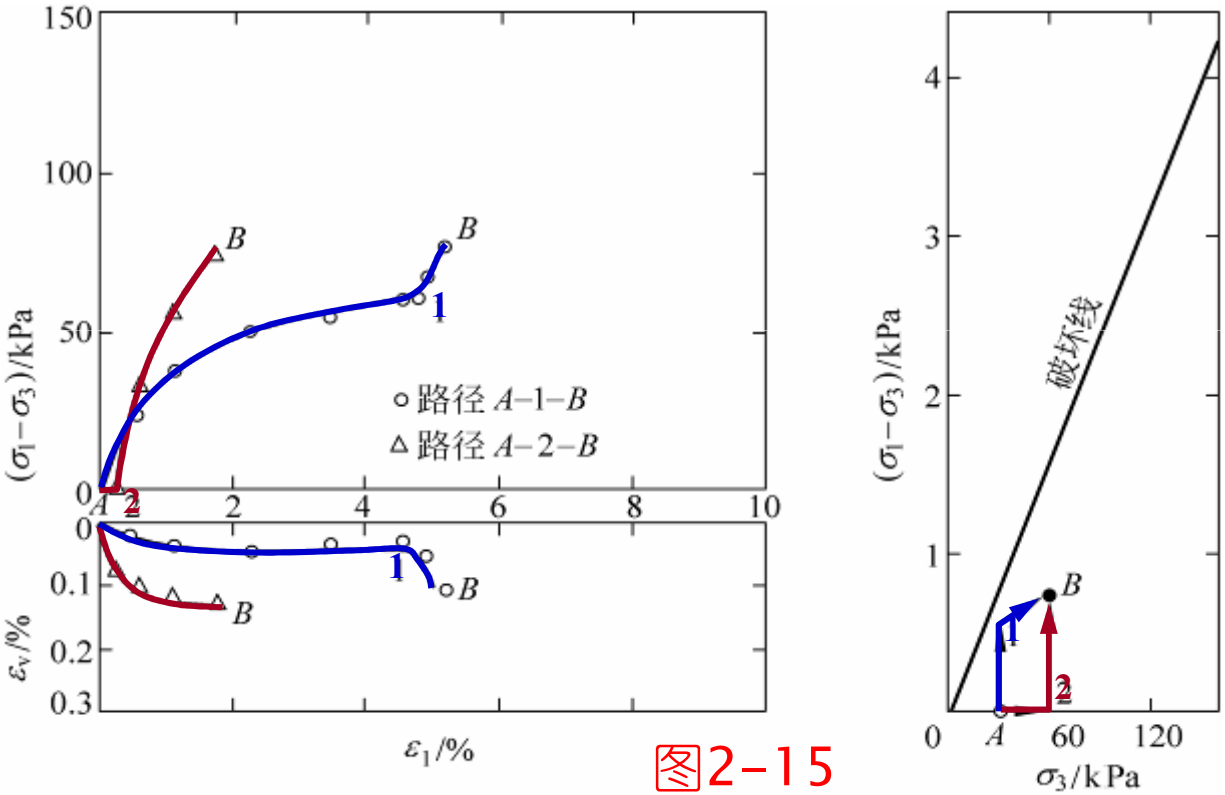
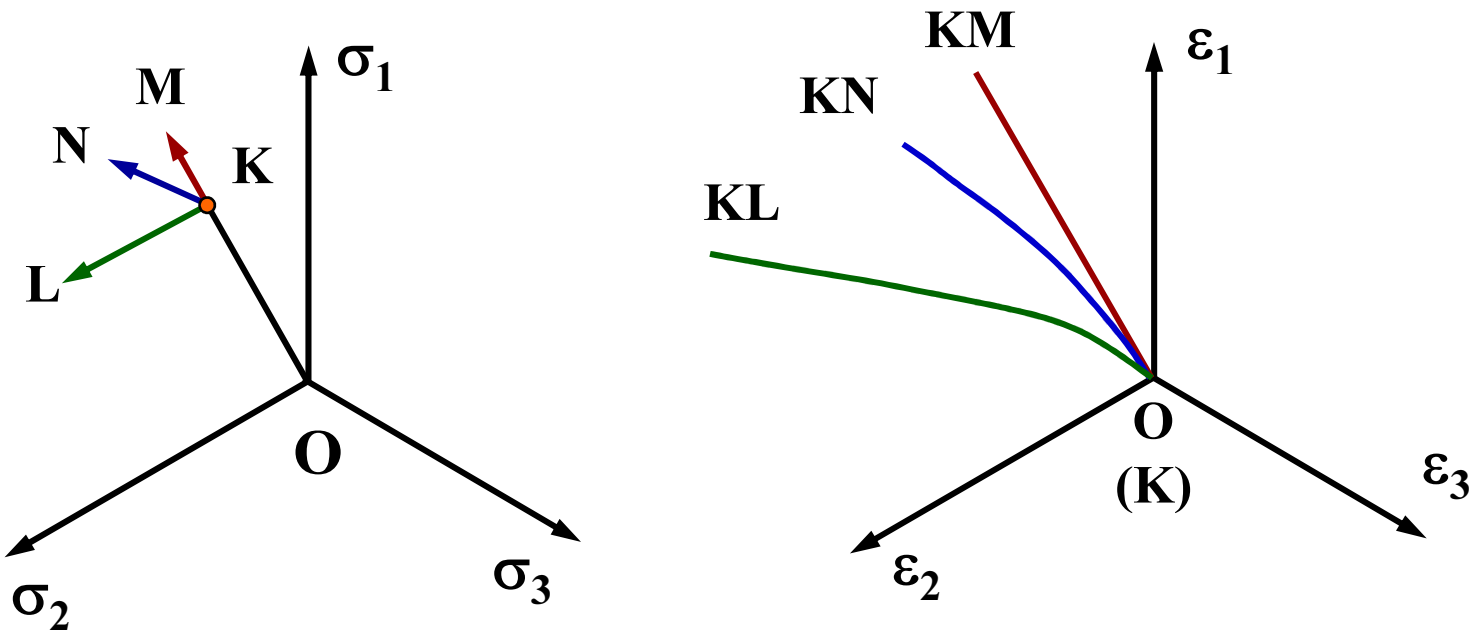


图2-15

亚基本变形特性- 应力路径

P56-57



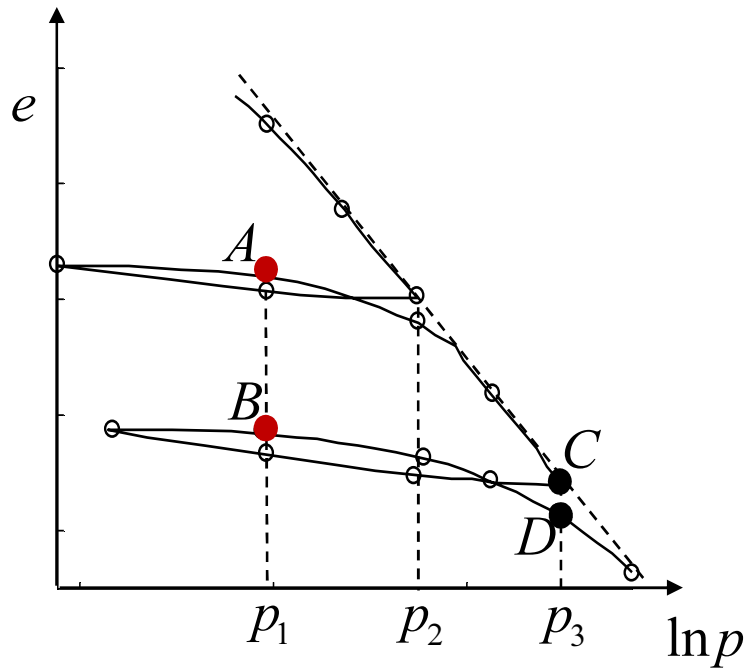
π平面上应力路径转折时的应变路径

（重塑饱和粘土）　　图2-16

亚基本变形特性- 应力路径

P57

☞ 指曾经经历的应力作用历史对当前加载状态下土应力应变关系的影响



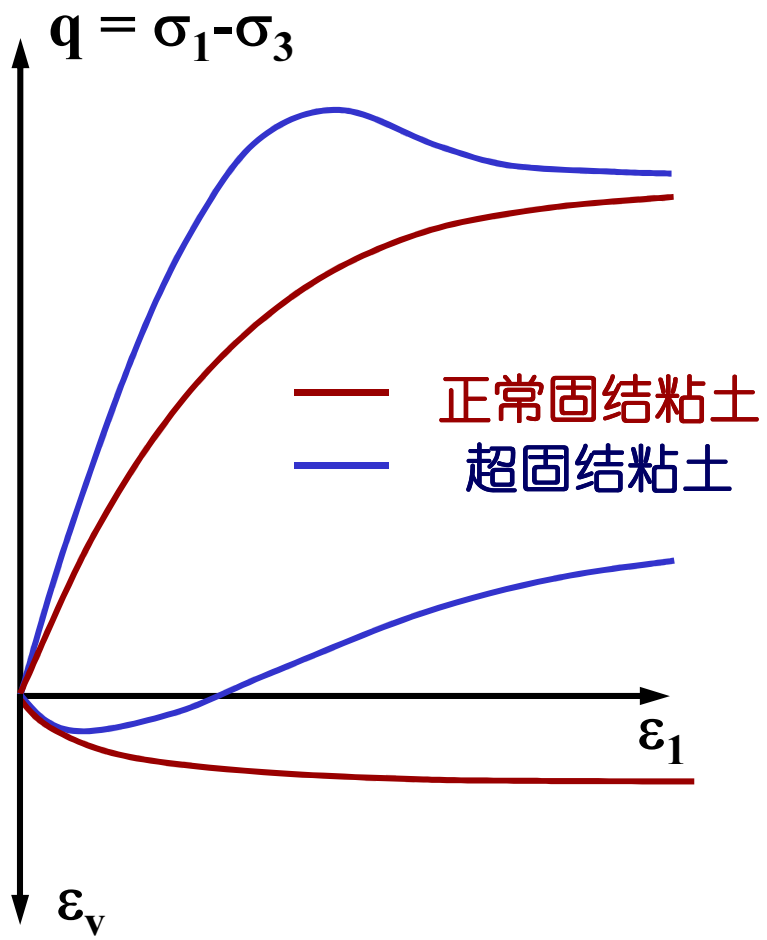
等向固结加载历史-超固结特性

在压力p_1时，不同应力历史的土具有不同的孔隙比e。图中对应A、B两点为始点的等向压缩曲线不同，亦即反映土压硬性的压缩规律因超固结特性而发生改变

亚基本变形特性- 应力历史

P58

- 在同样的约束压力下，超固结土的密度相对正常固结土更大，因而更难压缩
- 在剪切加载过程中，土的剪缩性减弱，剪胀性相对增强
- 超固结土常存在峰值强度，之后发生应变软化现象



亚基本变形特性- 应力历史

P58

第二章 土的本构关系

2.1 概述 √

2.2 应力和应变 √

2.3 土的应力变形特性 √

2.4 土的弹性模型

2.5 土的弹塑性模型的一般原理

2.6 剑桥模型(Cam—Clay)

2.7 其它典型弹塑性模型

2.8 土的损伤模型

2.9 土的广义位势理论

- 概述
- 线弹性：（广义）虎克定律
- 非线弹性：增量虎克定律
  - 邓肯张模型
- 高阶弹性模型：超弹性与次弹性模型

土的弹性模型

P58

- ☞ 线弹性模型：一般不适用于土，有时可近似使用：地基应力计算；分层总和法
- ☞ 非线弹性模型：使用最多，实用性强：一般参数不多；物理意义明确；确定参数的试验比较简单；使用增量广义虎克定律
- ☞ 高阶的弹性模型：理论基础比较完整严格；不易建立实用的形式：参数多；意义不明确；不易用简单的试验确定

概　　述

P58

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{1}{E}\cdot[\sigma_x - \nu\cdot(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y = \dfrac{1}{E}\cdot[\sigma_y - \nu\cdot(\sigma_z + \sigma_x)] \\ \varepsilon_z = \dfrac{1}{E}\cdot[\sigma_z - \nu\cdot(\sigma_x + \sigma_y)] \end{cases} \qquad \begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{2\cdot(1+\nu)}{E}\cdot\tau_{xy} \\ \gamma_{yz} &= \frac{2\cdot(1+\nu)}{E}\cdot\tau_{yz} \\ \gamma_{zx} &= \frac{2\cdot(1+\nu)}{E}\cdot\tau_{zx} \end{aligned}$$

☞ 弹性常数通过单向拉伸或压缩试验确定： $E = \dfrac{\sigma_a}{\varepsilon_a}$　$\mu = -\dfrac{\varepsilon_r}{\varepsilon_a}$

$$\begin{cases} p = K\cdot\varepsilon_v \\ q = 3\cdot G\cdot\bar{\varepsilon} \end{cases}$$

其中， $K = \dfrac{E}{3\cdot(1-2\cdot\nu)}$　$G = \dfrac{E}{2\cdot(1+\nu)}$

☞ 弹性常数K和G分别为 $p \sim \varepsilon_v$ 和 $q \sim \bar{\varepsilon}$ 直线关系的斜率

广义胡克定律

式2-50

$$\begin{cases} \delta\varepsilon_x = \dfrac{1}{E_t}\cdot[\delta\sigma_x - \nu_t\cdot(\delta\sigma_y + \delta\sigma_z)] \\ \delta\varepsilon_y = \dfrac{1}{E_t}\cdot[\delta\sigma_y - \nu_t\cdot(\delta\sigma_z + \delta\sigma_x)] \\ \delta\varepsilon_z = \dfrac{1}{E_t}\cdot[\delta\sigma_z - \nu_t\cdot(\delta\sigma_x + \delta\sigma_y)] \end{cases}$$

$$\delta\gamma_{xy} = \frac{2\cdot(1+\nu_t)}{E_t}\cdot\delta\tau_{xy}$$

$$\delta\gamma_{yz} = \frac{2\cdot(1+\nu_t)}{E_t}\cdot\delta\tau_{yz}$$

$$\delta\gamma_{zx} = \frac{2\cdot(1+\nu_t)}{E_t}\cdot\delta\tau_{zx}$$

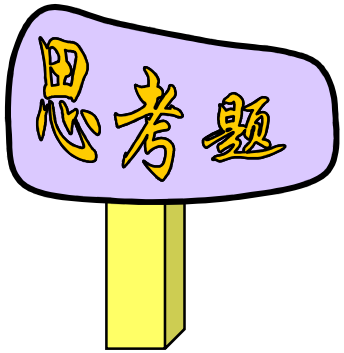
$$\begin{cases} dp = K_t\cdot d\varepsilon_V \\ dq = 3\cdot G_t\cdot d\bar{\varepsilon} \end{cases}$$

其中，

$$K_t = \frac{E_t}{3\cdot(1-2\cdot\nu_t)}$$

$$G_t = \frac{E_t}{2\cdot(1+\nu_t)}$$

增量形式的广义胡克定律 P59



1. 弹性和非弹性？　线弹性和非线性弹性？
2. 弹性常数E_t和μ_t可通过什么试验来确定？
3. 弹性常数K_t和G_t可通过什么试验来确定？

非线性弹性模型

P61

☞ 要点：将E_t、μ_t或K_t、G_t 表示为应力状态的函数

- 土体变形特性试验研究
- 确定切线弹性常数和应力状态的关系
- 加卸载处理：判别准则、模量
- 模型参数求取方法
- 对模型进行验证

☞ 将试验得到的应力应变曲线用一数学函数来表示

☞ 求导建立切线弹性常数和应力状态的关系表达式

建立非线性弹性模型的要点

P61

2.4.2

■ 土的应力应变的双曲线关系(Kondner，1963)：

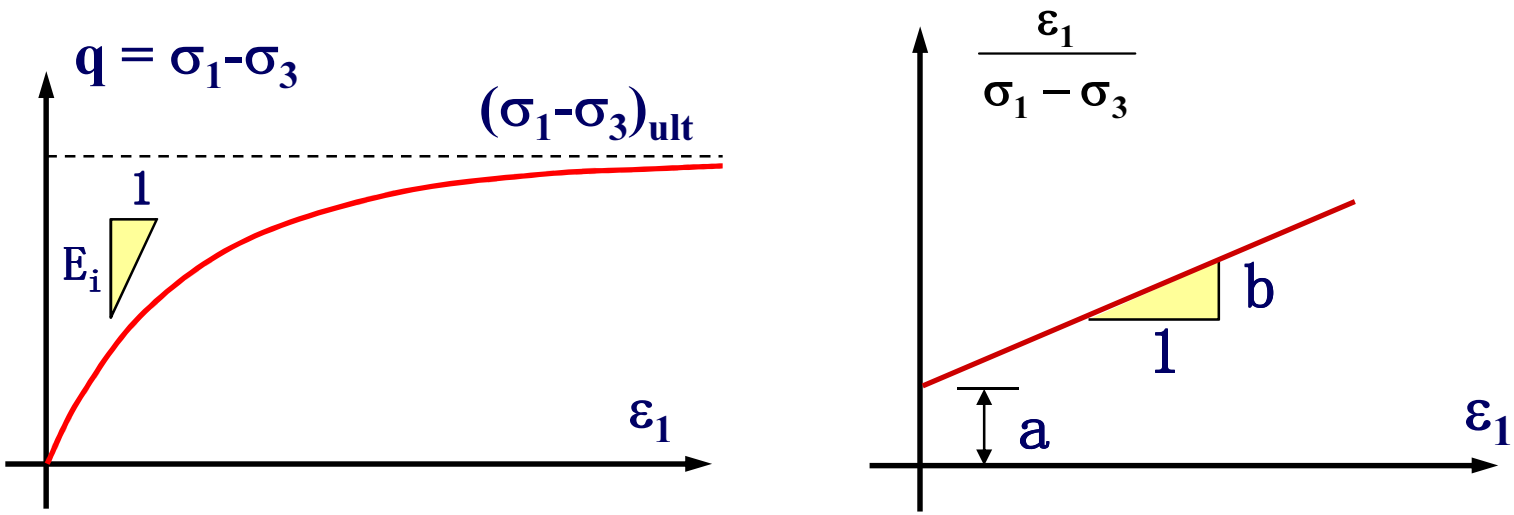


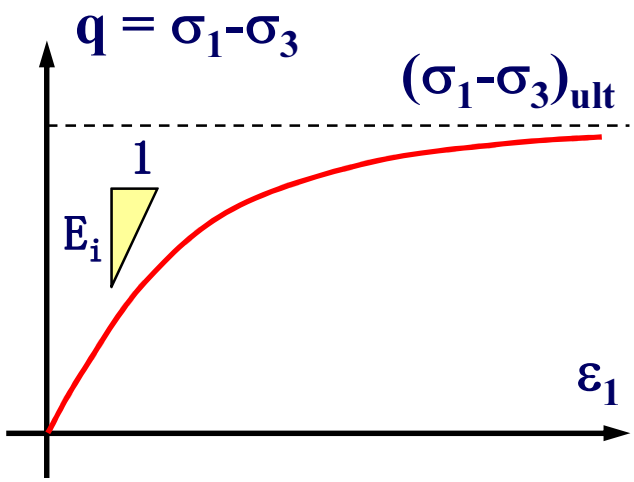
图2-19

$$\sigma_1-\sigma_3=\frac{\varepsilon_1}{a+b\cdot\varepsilon_1}$$

$$\boxed{\frac{\varepsilon_1}{\sigma_1-\sigma_3}}=a+b\cdot\boxed{\varepsilon_1}$$

切线杨氏模量 E_t

P62



$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{\varepsilon_1}{a + b \cdot \varepsilon_1}$$

在常规三轴试验中：

$$E_t = \frac{d(\sigma_1 - \sigma_3)}{d\varepsilon_1} = \frac{a}{(a + b\varepsilon_1)^2}$$

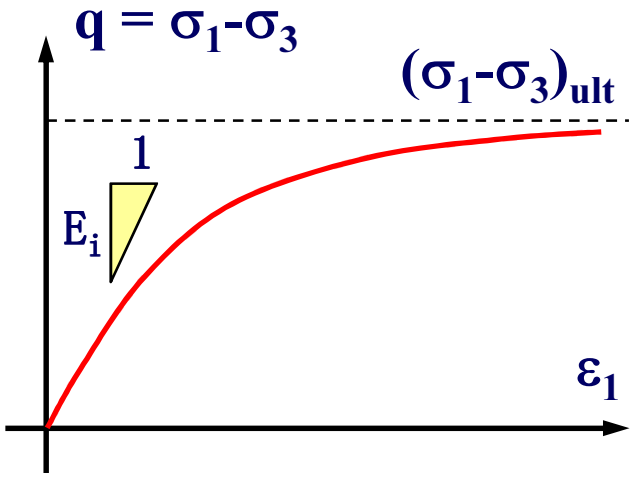
☞ 参数a的物理意义：　$E_i = \frac{1}{a}$

简布(Janbu, 1963)公式：

$$E_i = k \cdot Pa \cdot \left(\frac{\sigma_3}{Pa}\right)^n$$

P63

切线杨氏模量 E_t



$$\sigma_1-\sigma_3=\frac{\varepsilon_1}{a+b\cdot\varepsilon_1}$$

☞ 参数b的物理意义：

$$(\sigma_1-\sigma_3)_{ult}=\frac{1}{b}\qquad 或\qquad b=\frac{1}{(\sigma_1-\sigma_3)_{ult}}$$

引入破坏比R_f：　$R_f=\dfrac{(\sigma_1-\sigma_3)_f}{(\sigma_1-\sigma_3)_{ult}}$

$$\Rightarrow\quad b=\frac{1}{(\sigma_1-\sigma_3)_{ult}}=\frac{R_f}{(\sigma_1-\sigma_3)_f}$$ 式2-66

其中：　$(\sigma_1-\sigma_3)_f=\dfrac{2c\cos\varphi+2\sigma_3\sin\varphi}{1-\sin\varphi}$

式2-72

切线杨氏模量 E_t

P63

$$\sigma_1-\sigma_3=\frac{\varepsilon_1}{a+b\cdot\varepsilon_1}$$

$$E_t=\frac{a}{(a+b\varepsilon_1)^2}$$

2-62

$$\frac{1}{a}=E_i=k\cdot Pa\cdot\left(\frac{\sigma_3}{Pa}\right)^n$$

2-63

$$b=\frac{1}{(\sigma_1-\sigma_3)_{ult}}=\frac{R_f}{(\sigma_1-\sigma_3)_f}$$

2-65

$$E_t=\frac{1}{E_i}\cdot\left[\frac{1}{\frac{1}{E_i}+\frac{R_f}{(\sigma_1-\sigma_3)_f}\varepsilon_1}\right]^2$$

$$E_t=E_i\cdot\left[1-R_f\frac{\sigma_1-\sigma_3}{(\sigma_1-\sigma_3)_f}\right]^2$$

$$E_t=k\cdot Pa\cdot\left(\frac{\sigma_3}{Pa}\right)^n\cdot\left[1-R_f\frac{\sigma_1-\sigma_3}{(\sigma_1-\sigma_3)_f}\right]^2$$

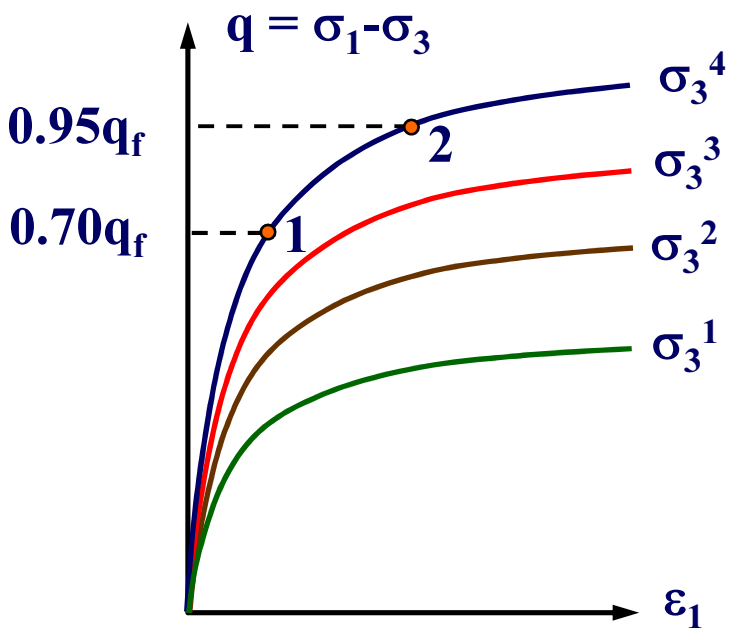
$$E_t=k\cdot Pa\cdot\left(\frac{\sigma_3}{Pa}\right)^n\cdot\left[1-\frac{R_f(\sigma_1-\sigma_3)(1-\sin\varphi)}{2c\cos\varphi+2\sigma_3\sin\varphi}\right]^2$$

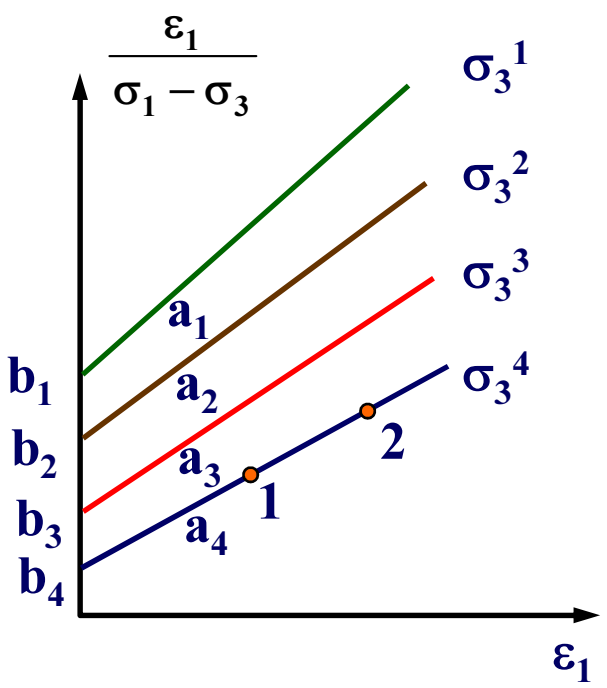
切线杨氏模量 E_t

■ 参数a, b确定

1. 坐标转换法

2. 二点法

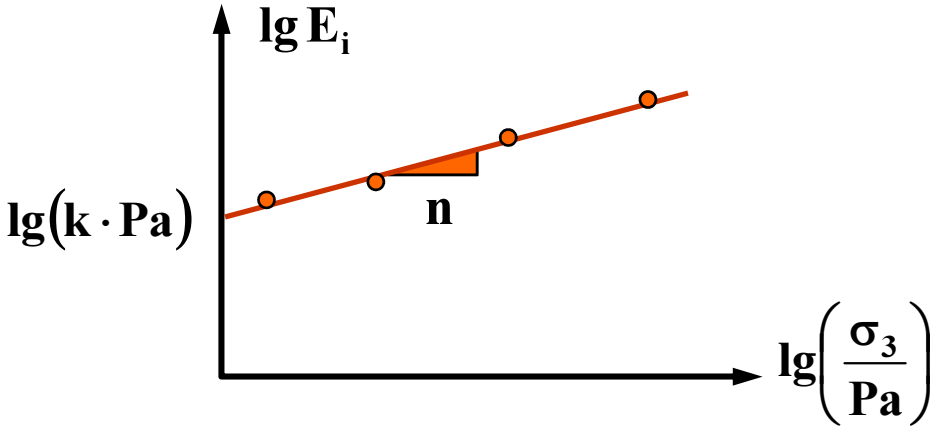




切线杨氏模量 E_t

P66

■ 参数k, n, R_f确定



$$E_i = \frac{1}{a} = k \cdot Pa \cdot \left(\frac{\sigma_3}{Pa}\right)^n$$

$$\lg\left(\frac{1}{a}\right) = \lg(k \cdot Pa) + n \cdot \lg\left(\frac{\sigma_3}{Pa}\right)$$

⇨ k，n

P63 图 2-20

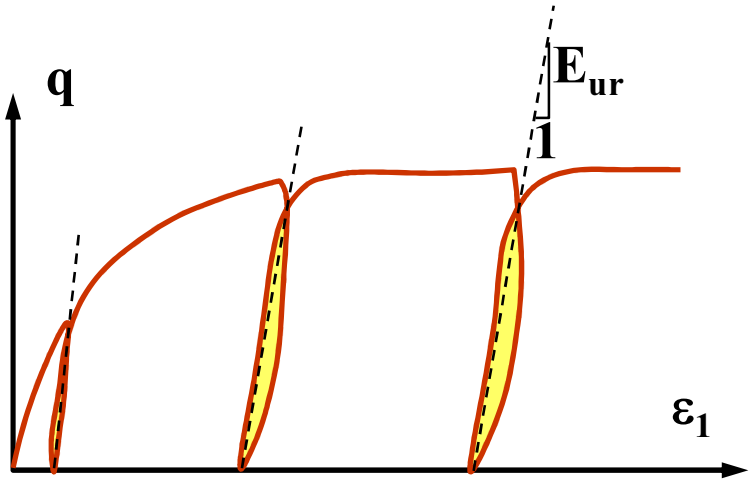
$$R_f = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)_f}{(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}} = b \cdot (\sigma_1 - \sigma_3)_f$$

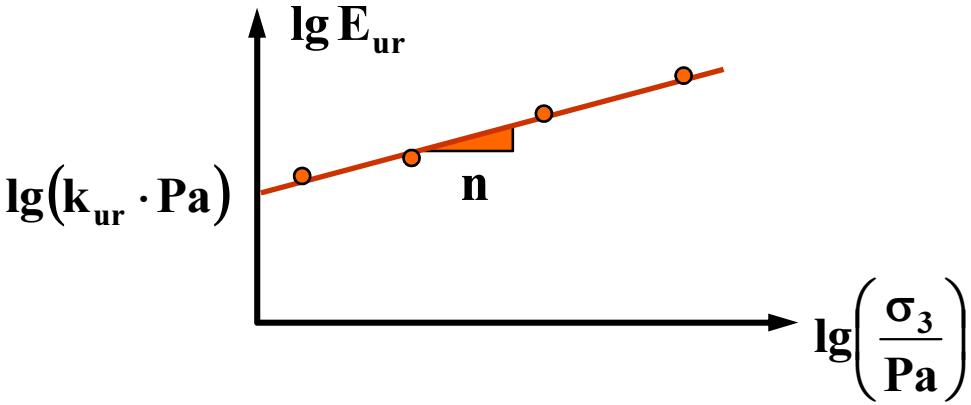
对所有σ_3取平均值 ⇨ R_f

切线杨氏模量 E_t

P64

above 2-73





- 进行循环加载试验，对某σ_3取平均E_{ur}
- 简布(Janbu)公式

$$E_{ur} = k_{ur} \cdot Pa \cdot \left(\frac{\sigma_3}{Pa}\right)^n$$

- 取同E_i相同的n　式2-79

$\Rightarrow$ K_{ur}

卸载和重加载模量 E_{ur}

P65

■ 假定常规三轴压缩试验ε_1与$-\varepsilon_3$之间也存在双曲线关系

$$\varepsilon_1 = \frac{-\varepsilon_3}{f + D\cdot(-\varepsilon_3)} \quad 或 \quad \Rightarrow \quad \frac{-\varepsilon_3}{\varepsilon_1} = f + D\cdot(-\varepsilon_3)$$

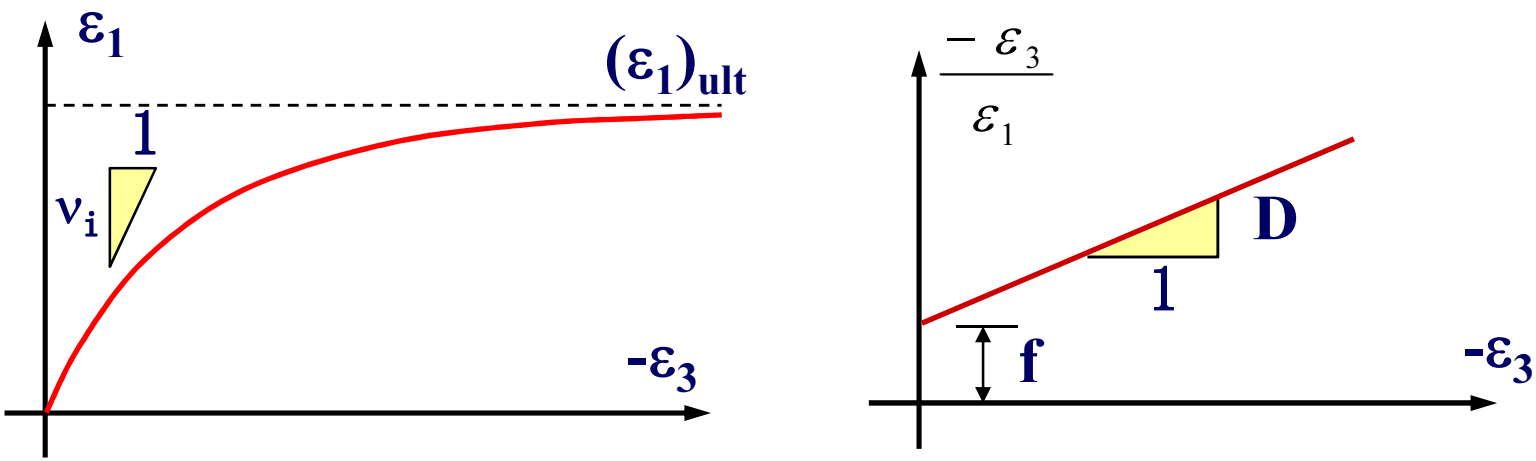
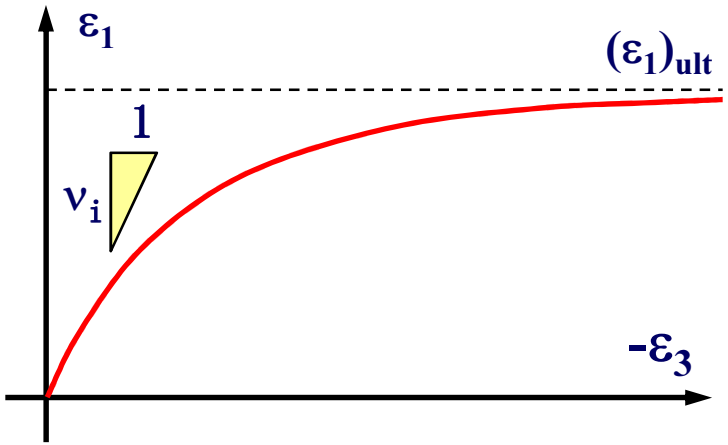


图2-21

切线泊松比 ν_t



$$\varepsilon_1 = \frac{-\varepsilon_3}{f + D\cdot(-\varepsilon_3)}$$

在常规三轴试验中：

$$\nu_t = \frac{-d\varepsilon_3}{d\varepsilon_1} = \frac{f}{(1 - D\cdot\varepsilon_1)^2}$$

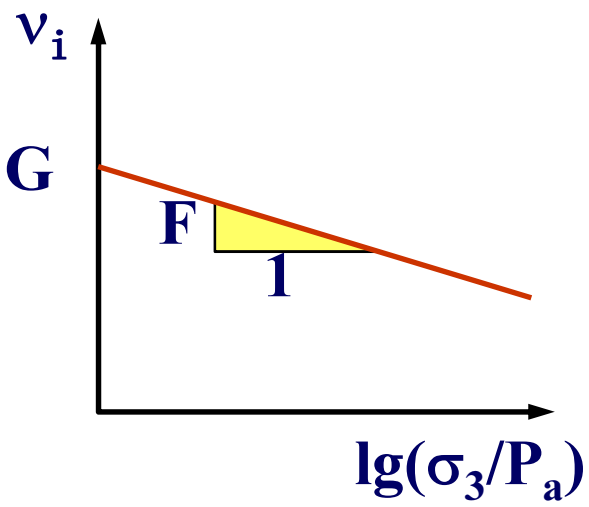
☞ 参数物理意义：

$$\mathrm{f} = \left(\frac{-\varepsilon_3}{\varepsilon_1}\right)_{\varepsilon_3=0} = \nu_i$$

$$\mathbf{D} = \frac{\mathbf{1}}{(\varepsilon_1)_{\mathbf{ult}}}$$ ⇨ 常数 $\boxed{\mathrm{D}}$

切线泊松比 ν_t

P64



试验表明，ν_i与围压σ_3有关：

$$\nu_i = f = G - F \cdot \lg\left(\frac{\sigma_3}{P_a}\right)$$

⇨ G，F

$$\nu_t = \frac{-d\varepsilon_3}{d\varepsilon_1} = \frac{f}{(1 - D \cdot \varepsilon_1)^2} = \frac{G - F \cdot \lg(\sigma_3 / P_a)}{(1 - D \cdot \varepsilon_1)^2}$$

切线泊松比 ν_t

P64

$$\nu_t = \frac{G - F\lg(\sigma_3/Pa)}{\left\{1 - \frac{D(\sigma_1 - \sigma_3)}{KPa\left(\frac{\sigma_3}{Pa}\right)^n\left[1 - \frac{R_f(\sigma_1 - \sigma_3)(1 - \sin\varphi)}{2c\cos\varphi + 2\sigma_3\sin\varphi}\right]}\right\}^2}$$

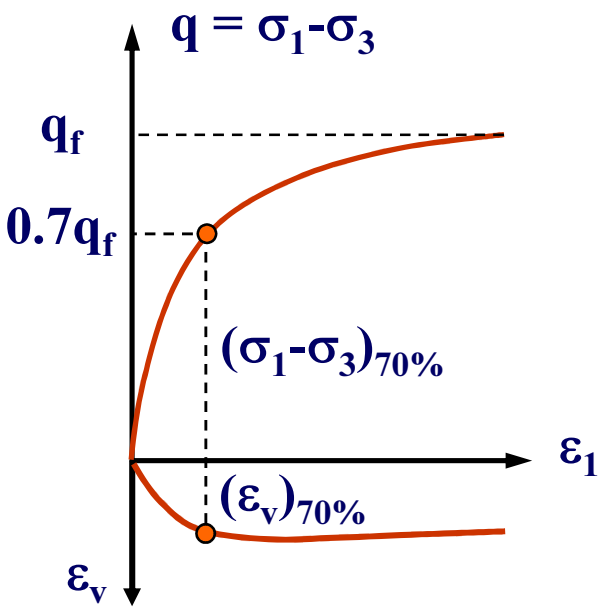
- 根据弹性理论，要求　$0 < \nu_t < 0.5$
- 经验表明，上式计算的ν_t值常常偏大，故Daniel(1974)建议

$$\nu_t = \nu_i + (\nu_{tf} - \nu_i)\cdot\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{(\sigma_1 - \sigma_3)_f}$$

ν_{tf}为破坏时的泊松比

切线泊松比 ν_t

P64



- 引入体变模量B　$B=\dfrac{E}{3\cdot(1-2\cdot\nu)}$
- 在常规三轴剪切过程中　$B=\dfrac{\Delta P}{\Delta\varepsilon_v}=\dfrac{\Delta(\sigma_1-\sigma_3)}{3\Delta\varepsilon_v}$
- 对每个σ_3=常数的三轴试验，B为常数　$B=\dfrac{(\sigma_1-\sigma_3)_{70\%}}{3\cdot(\varepsilon_v)_{70\%}}$
- 试验表明　$B=k_b\cdot Pa\cdot(\dfrac{\sigma_3}{Pa})^m$

2-85

⇒ k_b，m

体积模量B

P65

☞ 加载函数（邓肯，1984）：

$$S_s = S \cdot \sqrt[4]{\sigma_3 / Pa} \qquad 2\text{–}80$$

$$S = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{(\sigma_1 - \sigma_3)_f} \qquad 2\text{–}81$$

☞ 如历史上加载函数的最大值为S_{sm}，则临界应力水平为：

$$S_m = \frac{S_{sm}}{\sqrt[4]{\sigma_3 / Pa}} \qquad 2\text{–}82$$

☞ 判别准则

- $S > S_m$ 加载 ⇨ E_t和ν_t E_t和B 计算
- $S < 0.75 \cdot S_m$ 卸载或再加载 ⇨ 卸载模量E_{ur}（不考虑体变）
- $0.75 \cdot S_m < S < S_m$ 过渡区 ⇨ 用E_t与E_{ur}内插

加卸载判别准则

P65

☞ 优点：简单、经验多

- ☺ 可以反映土体变形的非线性，在一定程度上可以反映土体变形的弹塑性
- ☺ 建立在广义虎克定律的基础上，很容易为工程界接受
- ☺ 模型参数不多，物理意义明确
- ☺ 确定模型参数只需常规三轴压缩试验
- ☺ 得到广泛应用，积累了大量的经验

例题2-3

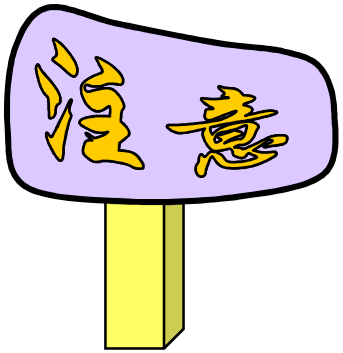
总结与评述

P69

☞ 缺点：理论基础有限制，仅仅是变模量的弹性模型

- ☹ 不能反映土的剪缩和剪胀性
- ☹ 不能很好地反映不同应力路径的影响
- ☹ 没有考虑中主应力的影响
- ☹ 计算结果和原型观测结果往往存在相当的误差：计算的变形尤其是水平变形总体偏大
- ☹ 加卸载判别准则经常发生问题

总结与评述

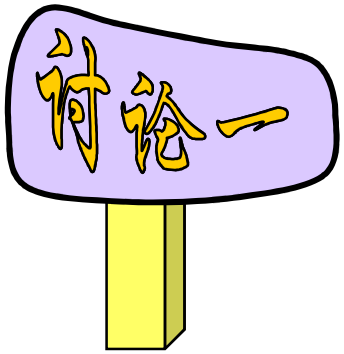


应注意的几个问题：防止模型的滥用

- 在确定其模型参数时，一般只能使用σ_3＝常数（$d\sigma_3=0$）的常规三轴压缩试验
- 对邓肯模型的使用和修正要有试验资料的支持，应不违背基本的理论原则

教材P66–67页

总结与评述



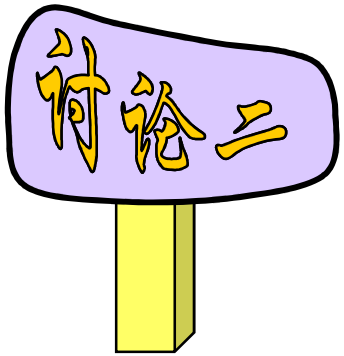
$$B = \frac{\Delta(\sigma_1 - \sigma_3)}{3\Delta\varepsilon_v}$$

$$B = k_b \cdot Pa \cdot \left(\frac{\sigma_3}{Pa}\right)^m$$

☞ 对许多密实的粗粒土，根据试验结果求取邓肯EB模型参数时，常发现计算的低围压时的B值比高围压时还大，使得m为一负值，你怎么理解这种现象？讨论m为负的合理性？

总结与评述

DEL



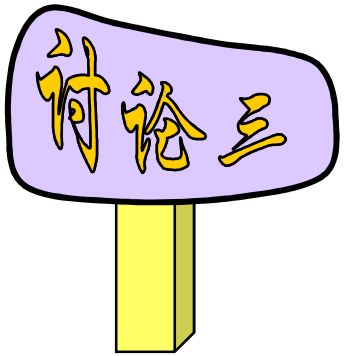
$$D = \frac{1}{(\varepsilon_1)_{ult}}$$

$$\nu_t = \frac{f}{(1 - D \cdot \varepsilon_1)^2}$$

☞ 根据邓肯Eν模型，参数D的物理意义为轴向变形的极限，怎么理解轴向变形存在极限？此时在ε_v-ε_1图上会发生什么现象？

总结与评述

DEL



$$E_t = E_i \cdot \left[1 - R_f \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{(\sigma_1 - \sigma_3)_f} \right]^2$$

$$E_i = k \cdot Pa \cdot \left(\frac{\sigma_3}{Pa}\right)^n$$

$$\nu_t = \nu_i + (\nu_{tf} - \nu_i) \cdot \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{(\sigma_1 - \sigma_3)_f}$$

☞ 某人采用邓肯Eν模型进行土石坝三维应力变形计算，采用“平均主应力P代替原模型中的σ_3，以广义剪应力q代替原模型中的(σ_1-σ_3)，籍此考虑中主应力的影响”，试进行评述？

总结与评述

DEL

☞ 基本方法 ➡ $\begin{cases} dp = K \cdot d\varepsilon_v \\ dq = 3G \cdot d\bar{\varepsilon} \end{cases}$

☞ 基本思路 ➡ $\begin{cases} K_t = f_1(p,q) \\ G_t = f_2(p,q) \end{cases}$

☞ 重要改进 ➡ 反映土的剪胀性

各种非线性KG 模型

P69-71

1. 等向固结试验：$p-\varepsilon_v$用幂函数表示

$$K_t = \frac{dp}{d\varepsilon_v} = \frac{p_c}{\varepsilon_{vc}}\left[1 + n\left(\frac{\varepsilon_v}{\varepsilon_{vc}}\right)^{n-1}\right]$$

n、p_c和ε_{vc}为试验常数

2. P为常数三轴试验：设$q-\bar{\varepsilon}$为双曲线关系

$$G_t = \frac{dq}{3d\bar{\varepsilon}} = G_i\left[1 - R_f \frac{q/3}{10^{\alpha}\left(\frac{p}{p_c e_{ic}}\right)^{\beta}}\right]^2$$

n, α, β：试验常数

R_f ：破坏比

e_{ic}：初始孔隙

多马舒克-维利亚潘模型

Domaschuk—Valliappan

P69

$$K_t = K_i + \alpha_K p$$

$$G_t = G_i + \alpha_G p + \beta_G q$$

- K_i和α_K可用各向等压试验确定
- G_i、α_G和β_G用p=常数的三轴压缩试验确定

内勒(Naylor)模型

P70

$$d\varepsilon_v = \frac{1}{K_t}dp + \frac{1}{H_t}dq$$

$$d\bar{\varepsilon} = \frac{1}{3G_t}dq$$

- dq可以引起体积变化—剪胀性
- 模量矩阵不对称

伊鲁米和维鲁伊特的耦合模型

Ilumi-Verruijt

P70

$$\varepsilon_v = f_1(p,q)$$
$$\bar{\varepsilon} = f_2(p,q)$$

$$d\varepsilon_v = \frac{\partial f_1}{\partial p}dp + \frac{\partial f_1}{\partial q}dq = Adp + Bdq$$

$$d\bar{\varepsilon} = \frac{\partial f_2}{\partial p}dp + \frac{\partial f_2}{\partial q}dq = Cdp + Ddq$$

反映了剪应力-体应变和平均主应力-剪应变间的耦合影响

沈珠江模型

P70

■ 堆石体应力应变存在如下全量关系（等应力比试验）

$$\varepsilon_v = \frac{1}{K_v}\cdot\left(1+\eta^2\right)^m\cdot\left(\frac{P}{P_a}\right)^H$$

$$\varepsilon_s = \frac{1}{G_s}\cdot\left(\frac{P}{P_a}\right)^{-d}\cdot F_s\cdot\left(\frac{q}{P_a}\right)^B$$

应力比： $\eta = q/P$

强度因子： $F_s = \left(\frac{1}{(1-\eta/\eta_u)}\right)^S$

极限应力比 $\eta_u = \eta_{u0}\cdot\left(\frac{p}{Pa}\right)^{-\beta}$

模型参数：K_v，m，H，G_s，d，B，η_{u0}，β

清华非线性解耦KG模型

DEL

■ 应力应变增量关系

$$d\varepsilon_v = \frac{1}{K_1}dp + \frac{1}{K_2}d\eta$$

$$K_1 = \frac{K_v}{H}(1+\eta^2)^{-m}\cdot\left(\frac{p}{Pa}\right)^{1-H}\cdot Pa$$

$$K_2 = \frac{K_v}{m}\cdot(1+\eta^2)^{1-m}\cdot\frac{1}{2\eta}\cdot\left(\frac{p}{Pa}\right)^{-H}$$

$$d\varepsilon_s = \frac{1}{G_1}dq + \frac{1}{G_2}d\eta$$

$$G_1 = \frac{G_s}{B}\cdot\left(\frac{p}{Pa}\right)^{d}\cdot\frac{1}{F_s}\cdot\left(\frac{q}{Pa}\right)^{1-B}\cdot Pa$$

$$G_2 = \frac{G_s}{s}\cdot\left(\frac{p}{Pa}\right)^{d}\cdot\frac{\eta_u-\eta}{Fs}\cdot\left(\frac{q}{Pa}\right)^{-B}$$

加载条件下堆石体总应变总应力间存在唯一关系，与应力路径无关

清华非线性解耦KG模型

DEL

■ 解耦

☞ 考虑加卸载，计算$d\varepsilon_v$,$d\varepsilon_s$

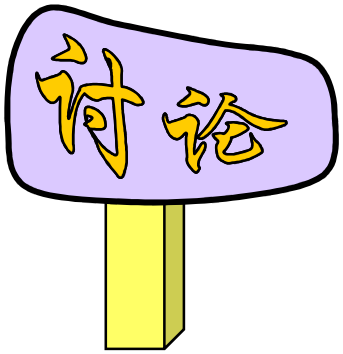
☞ 计算土体的耦合切线模量：

- 耦合切线体积模量 $K_{ld} = \dfrac{dp}{d\varepsilon_v}$
- 耦合切线剪切模量 $G_{ld} = \dfrac{dq}{3d\varepsilon_s}$

☞ 用K_{ld}，G_{ld}取代弹性矩阵中的K，G进行计算

清华非线性解耦KG模型

DEL



☞ 背景：教材p71页，倒数第一段：“…这类模型常要求做p=常数这种非常规的三轴试验，一般实验室不宜实行，并且受特定应力路径的限制。”

1. KG模型从理论上要求什么应力路径的试验？
2. 有人建议采用等向固结实验确定K，而采用P=常数的试验确定G，你对此有什么看法？

确定KG模型参数的试验

DEL

- 柯西(Cauchy)弹性理论：全量模型
- 格林(Green)弹性理论—超弹性理论：全量模型(Hyperelastic theory)
- 次弹性模型(Hyporelasticitic model)：增量模型

高阶非线性弹性理论模型

P71

- 基本假定：应力与应变有一一对应的关系
- 一般关系式：　$\sigma_{ij} = F_{ij}(\varepsilon_{kl})$
- 二阶多项式：　$\sigma_{ij} = A_0\delta_{ij} + A_1\varepsilon_{ij} + A_2\varepsilon_{ik}\varepsilon_{kj}$

  或：　$\varepsilon_{ij} = B_0\delta_{ij} + B_1\sigma_{ij} + B_2\sigma_{ik}\sigma_{kj}$
- 增量形式：

$$d\sigma_{ij} = \left[\left(K - \frac{2}{3}G\right)\delta_{kl}\delta_{ij} + 2a_2 I_{1\varepsilon}\delta_{kl}\delta_{ij} + a_3\left(I_{1\varepsilon}\delta_{kl} - \varepsilon_{kl}\right)\delta_{ij} + \left(2G + a_5 I_{1\varepsilon}\right)\delta_{ik}\delta_{jl} + a_5\varepsilon_{ij}\delta_{kl} + a_6\left(\varepsilon_{lj}\delta_{ik} + \varepsilon_{ik}\delta_{jl}\right)\right]d\varepsilon_{kl}$$

柯西(Cauchy)弹性理论

P71

■ 主要特点：

- ☞ 应力应变间存在一一对应（固定）关系
- ☞ 应变可恢复，与应力路径无关
- ☞ 可退化为虎克定律
- ☞ 不存在唯一的应变能，—不同的应力循环可能导致产生能量增加
- ☞ 因而不能保证解的唯一性和稳定性

柯西(Cauchy)弹性理论

- 基本假定：存在一个应变能密度函数$W(\varepsilon_{ij})$或余能密度函数 $\Omega(\sigma_{ij})$

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \qquad \text{或：} \qquad \varepsilon_{ij} = \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma_{ij}}$$

$$d\sigma_{ij} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} d\varepsilon_{kl} = H_{ijkl} d\varepsilon_{kl}$$

$$\text{或：} \qquad d\varepsilon_{ij} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl} = H'_{ijkl} d\sigma_{kl}$$

Hyperelastic theory

格林弹性理论—超弹性理论P72

■ 三阶超弹性模型

$$\Omega(\bar{I}_1,\bar{I}_2,\bar{I}_3)=A_0+A_1\bar{I}_1+\frac{1}{2}B_1\bar{I}_1^{\,2}+\frac{1}{3}B_2\bar{I}_1^{\,3}+B_3\bar{I}_1\bar{I}_2+B_4\bar{I}_2$$
$$+B_5\bar{I}_3+\frac{1}{4}B_6\bar{I}_1^{\,4}+B_7\bar{I}_1^{\,2}\bar{I}_2+\frac{1}{2}B_8\bar{I}_2^{\,2}+B_9\bar{I}_1\bar{I}_3$$

式中，为了方便将各应力不变量表示为：

$$\bar{I}_1=\sigma_{kk},\quad \bar{I}_2=\frac{1}{2}\sigma_{km}\sigma_{km},\quad \bar{I}_3=\frac{1}{3}\sigma_{km}\sigma_{kn}\sigma_{nm}$$

格林弹性理论—超弹性理论 P72

■ 三阶超弹性模型

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma_{ij}} = \varphi_1 \delta_{ij} + \varphi_2 \sigma_{ij} + \varphi_3 \sigma_{im} \sigma_{mj}$$

式中，

$$\varphi_1 = B_1 \bar{I}_1 + B_2 \bar{I}_1^{\,2} + B_3 \bar{I}_2^{\,2} + B_6 \bar{I}_1^{\,3} + 2B_7 \bar{I}_1 \bar{I}_2 + B_9 \bar{I}_3$$

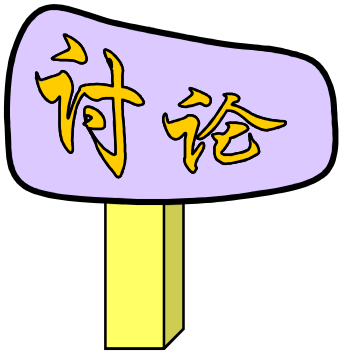
$$\varphi_2 = B_3 \bar{I}_1 + B_4 + B_7 \bar{I}_1^{\,2} + B_8 \bar{I}_2$$

$$\varphi_3 = B_5 + B_9$$

增量形式:

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl} = H_{ijkl} d\sigma_{kl}$$

格林弹性理论—超弹性理论P72



- 存在唯一的应变能：理论上严密无缺陷
- 全量弹性模型：能否反映应力路径影响？
- $W(\varepsilon_{ij})$或 $\Omega(\sigma_{ij})$可分别假设为应力或应变不变量的多项式函数，可反映材料非线性、剪胀性、压硬性以及应力应变导致的各向异性
- 高阶情况参数多，物理意义不明确
- 一阶情况可以退化为虎克定律

格林弹性理论—超弹性理论

P72

☞ 增量意义上的弹性模型：亦即只有增量应力张量和增量应变张量间存在一一对应弹性对应关系：

➡ 最小弹性(minimum elastic)模型。

$$d\sigma_{ij} = F_{ij}(\sigma_{mn}, d\varepsilon_{kl})$$

或 $$d\varepsilon_{ij} = Q_{ij}(\varepsilon_{mn}, d\sigma_{kl})$$

☞ 上述的各种非线弹性模型是其特例

Hyporelastic model

次弹性模型

■ 增量线性模型的四种一般表达形式

$$d\sigma_{ij} = C_{ijkl}(\sigma_{mn})d\varepsilon_{kl} \qquad d\sigma_{ij} = C_{ijkl}(\varepsilon_{mn})d\varepsilon_{kl}$$

$$d\varepsilon_{ij} = D_{ijkl}(\varepsilon_{mn})d\sigma_{kl} \qquad d\varepsilon_{ij} = D_{ijkl}(\sigma_{mn})d\sigma_{kl}$$

$C_{ijkl}(\sigma_{mn})$或$D_{ijkl}(\varepsilon_{mn})$分别为应变或应力路径有关的切线刚度张量或切线柔度张量

次弹性模型

P73

■ 各向同性材料，切线刚度张量的一般表达式：

$$
\begin{aligned}
C_{ijkl}(\sigma_{mn}) = {} & A_1\delta_{ij}\delta_{kl} + A_2\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{jk}\delta_{il}\right) \\
& + A_3\sigma_{ij}\delta_{kl} + A_4\delta_{ij}\sigma_{kl} \\
& + A_5\left(\delta_{ik}\sigma_{jl} + \delta_{il}\sigma_{jk} + \delta_{jk}\sigma_{il} + \delta_{jl}\sigma_{ik}\right) \\
& + A_6\delta_{ij}\sigma_{km}\sigma_{ml} + A_7\delta_{kl}\sigma_{im}\sigma_{mj} \\
& + A_8\left(\delta_{ik}\sigma_{jm}\sigma_{ml} + \delta_{il}\sigma_{jm}\sigma_{mk} + \delta_{jk}\sigma_{im}\sigma_{ml} + \delta_{jl}\sigma_{im}\sigma_{mk}\right) \\
& + A_9\sigma_{ij}\sigma_{kl} + A_{10}\sigma_{ij}\sigma_{km}\sigma_{ml} \\
& + A_{11}\sigma_{im}\sigma_{mj}\sigma_{kl} + A_{12}\sigma_{im}\sigma_{mj}\sigma_{kn}\sigma_{nl}
\end{aligned}
$$

次弹性模型

P73

■ 一阶次弹性模型：

$$C_{ijkl}(\sigma_{mn}) = (a_{01} + a_{11}\sigma_{rr})\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{1}{2}(a_{02} + a_{12}\sigma_{rr})(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{jk}\delta_{il})$$
$$+ a_{13}\sigma_{ij}\delta_{kl} + \frac{1}{2}a_{14}(\sigma_{jk}\delta_{li} + \sigma_{jl}\delta_{ki} + \sigma_{ik}\delta_{lj} + \sigma_{il}\delta_{kj}) + a_{15}\sigma_{kl}\delta_{ij}$$

$$d\sigma_{ij} = a_{01}d\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + a_{02}d\varepsilon_{ij} + a_{11}\sigma_{rr}d\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + a_{12}\sigma_{rr}d\varepsilon_{ij}$$
$$+ a_{13}\sigma_{ij}d\varepsilon_{kk} + a_{14}(\sigma_{jk}d\varepsilon_{ik} + \sigma_{ik}d\varepsilon_{jk}) + a_{15}\sigma_{kl}d\varepsilon_{kl}\delta_{ij}$$

7个材料参数

次弹性模型

P73

■ 零阶次弹性模型：

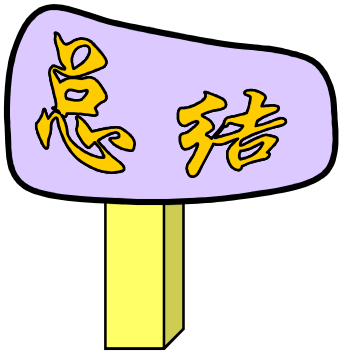
$$d\sigma_{ij} = a_{01} d\varepsilon_{kk} \delta_{ij} + a_{02} d\varepsilon_{ij}$$

$$d\sigma_{ij} = \lambda d\varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G d\varepsilon_{ij}$$

- 2个材料参数， 退化为增量虎克定律
- 前述的Duncan-Chang模型和一些KG增量弹性模型是次弹性模型的特例

次弹性模型

P73



- 线弹性模型一般不适用于土，但有时可近似使用：地基应力计算；分层总和法
- 非线弹性模型使用最多，有很好的实用性：一般参数不多；物理意义明确；使用的试验比较简单；使用增量广义虎克定律的形式(Duncan-Chang Model)
- 高阶弹性理论有比较完整严格的理论基础，但不易建立实用的形式：参数多；意义不明确；不易用简单的试验确定

第二章 土的本构关系

2.1 概述 √

2.2 应力和应变 √

2.3 土的应力变形特性 √

2.4 土的弹性模型 √

2.5 土的弹塑性模型的一般原理

2.6 剑桥模型(Cam—Clay)

2.7 其它典型弹塑性模型

2.8 土的损伤模型

2.9 土的广义位势理论

P75

2.5 土的弹塑性模型的一般原理

- 塑性理论在土力学中的应用
- 屈服准则与屈服面
- 流动规则与硬化定律
- 弹塑性本构模型的模量矩阵的一般表达式

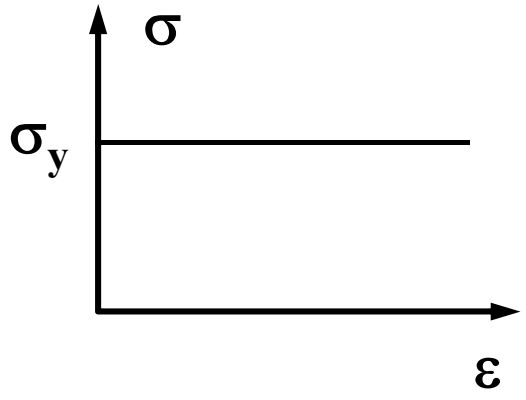
- ★ 1776年库仑公式与土压力理论—刚塑性
- ★ 借鉴金属塑性理论，弹性－理想（完全）塑性
- ★ 1960s，弹塑性理论模型：在增量意义上是弹－塑性的

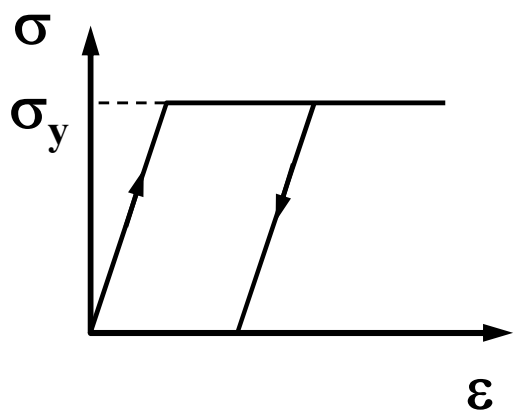
塑性理论在土力学中的应用

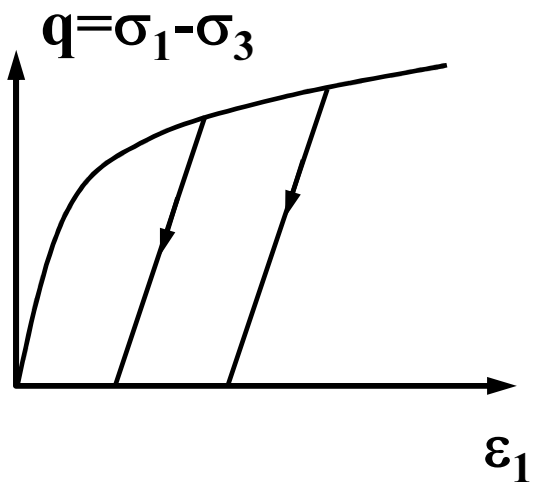
P75

- Drucker假说
- 屈服准则
- 流动—正交法则
- 硬化规律

弹塑性理论回顾







刚塑性

Perfectly plastic

弹性－完全塑性
（理想弹塑性）

Elasto-Plastic

增量弹塑性

Incremental
Elastoplastic

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^{e} + d\varepsilon_{ij}^{p}$$

塑性理论在土力学中的应用

P76

- 刚塑性理论:-极限平衡法：刚体滑动法、各种条分法、滑移线法（不计变形，不计过程）
- 弹－塑性理论：在一定范围为弹性，超过某一屈服条件为塑性变形。数值计算中出现“塑性区”
- （增量）弹塑性理论模型：一开始就是弹塑性变形同时发生。屈服面不断发展

不同塑性模型的应用

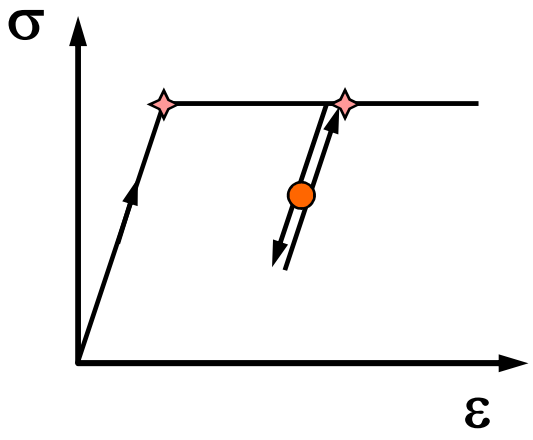
1. 屈服准则
2. 屈服函数
3. 屈服面与屈服轨迹
4. 土的屈服面与屈服轨迹的一般形式
5. 土的屈服面与屈服轨迹的确定

屈服准则与屈服面

P75

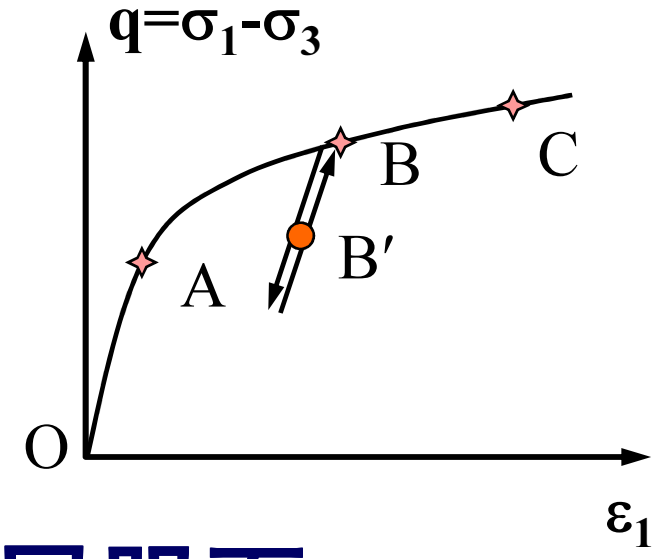
■ 屈服准则 (yield criterion)

☞ 判断是否发生塑性变形的准则
– 判断加载与卸载的准则



✦ 屈服点：加载时有塑性变形，卸载时只引起弹性变形

● 非屈服点：正负应力增量只引起弹性变形



屈服准则与屈服面

P75

■ 屈服函数 (yield function, yield equation)

☞ 屈服准则的数学表达式

✧ 简单应力状态　$f = q - q_y\left(\varepsilon^p\right) = 0$

✧ 一般应力状态　$f\left(\sigma_{ij}, H\right) = 0$

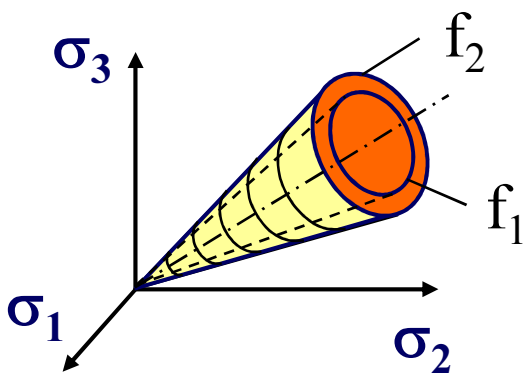
- 对于刚塑性和理想弹塑性模型；H为常数；
- 对于弹塑性模型；H是塑性应变的函数

屈服准则与屈服面

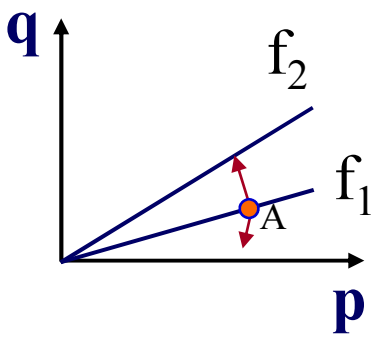
P76

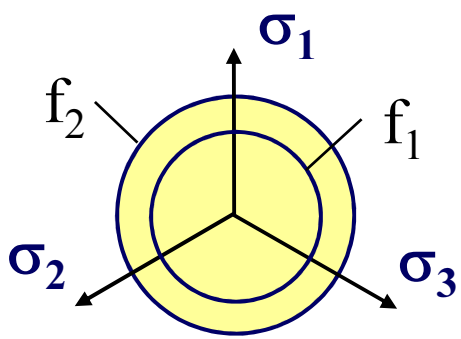
■ 屈服面与屈服轨迹：

屈服面－屈服准则在应力空间中的几何表示



圆锥形屈服面





p-q平面和π平面上的屈服轨迹

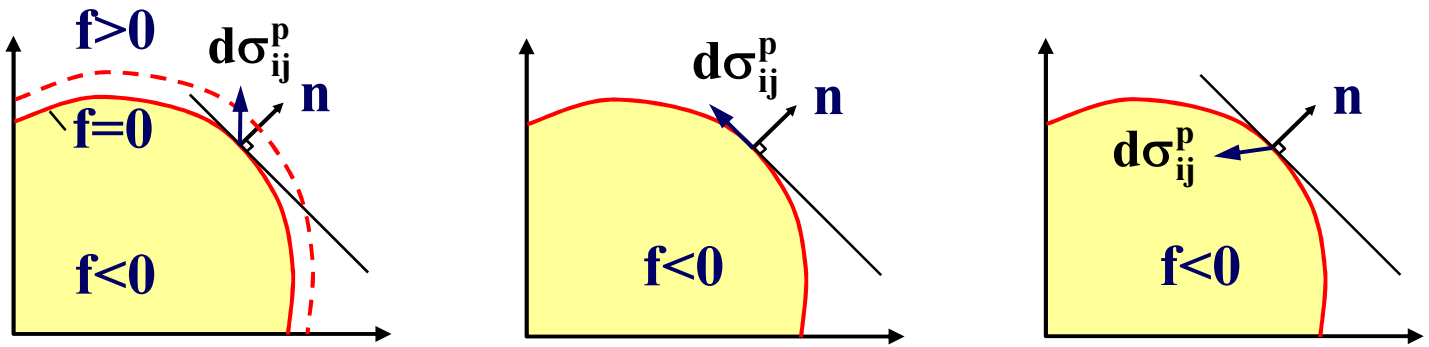
屈服准则与屈服面

P76

1） f<0 屈服面之内，只产生弹性应变

2） f=0

屈服面上



$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \cdot d\sigma_{ij} > 0$$

加载

弹性和塑性变形

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \cdot d\sigma_{ij} = 0$$

中性变载

弹性变形

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \cdot d\sigma_{ij} < 0$$

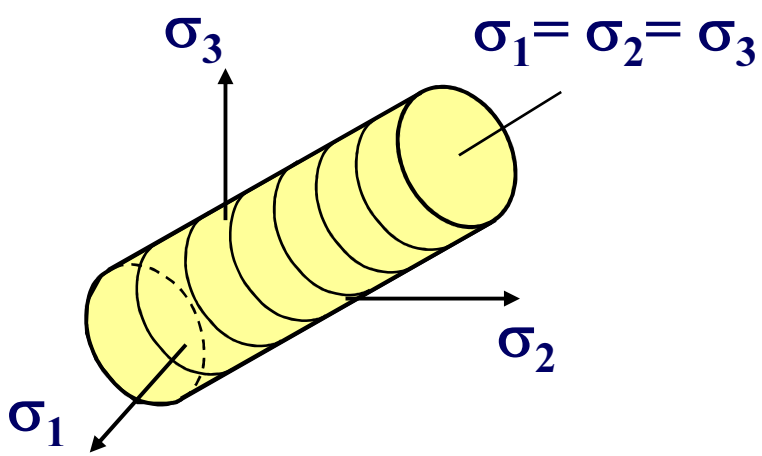
卸载

弹性变形

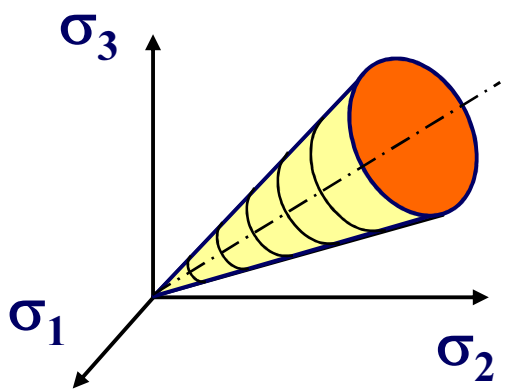
加卸载判断方法

P76

☞ 土是一种摩擦材料，只是在应力比变化时颗粒间才会相对滑动位移，多选择p-q平面上过原点的射线为土的屈服轨迹(空间为各种锥面)



金属材料

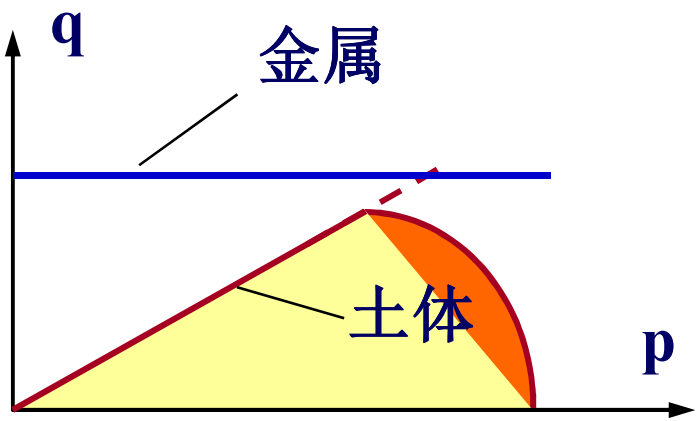


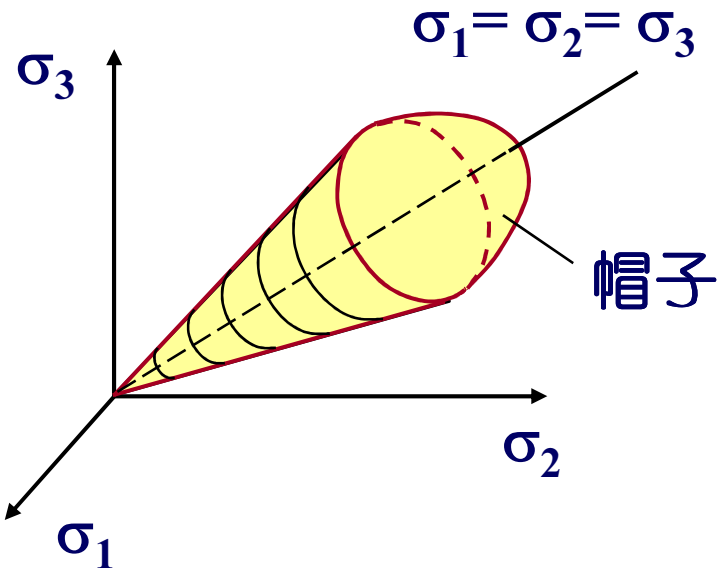
土体

土的屈服面与屈服轨迹的一般形式

P77

☞ 土在各向等压条件下也会发生颗粒相对运动，变密实，所以出现各种“帽子”屈服面

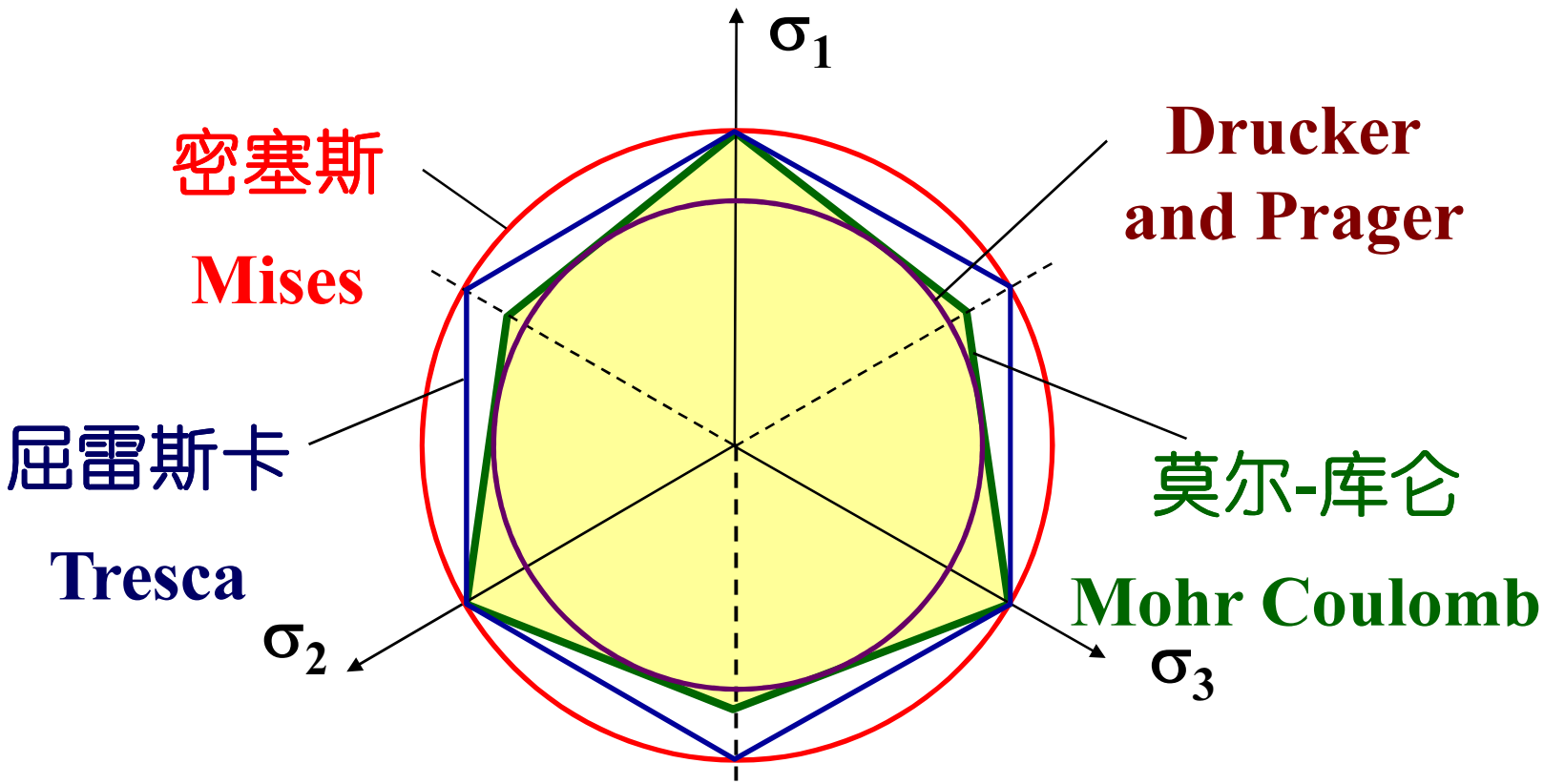




土的屈服面与屈服轨迹的一般形式

P77

☞ π 平面上的屈服轨迹：圆周、多边形、不规则凸形曲线



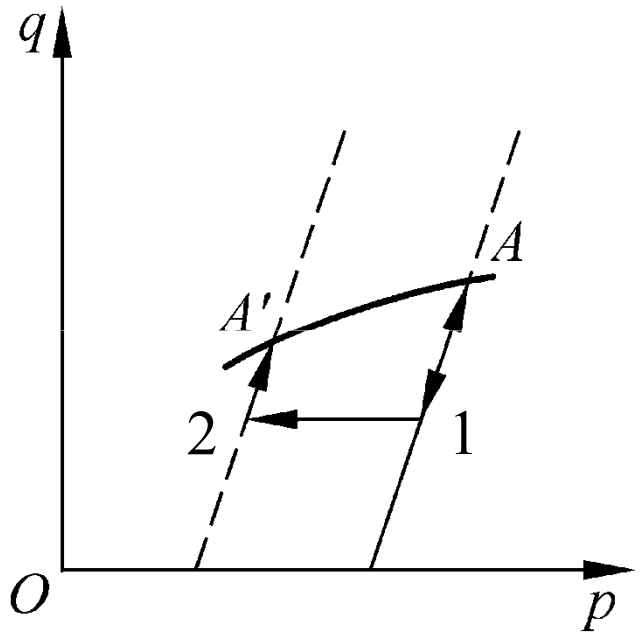
土的屈服面与屈服轨迹的一般形式

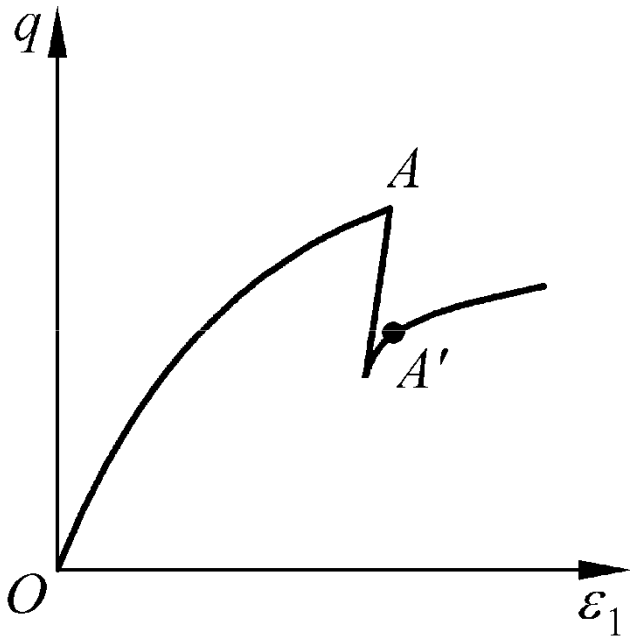
P78

- 假设屈服面与屈服函数
- 通过试验试加载勾画屈服轨迹
- 通过试验确定塑性应变增量的方向和Drucker假说确定塑性势面＝屈服轨迹

土的屈服面与屈服轨迹的确定

■ 通过试验搜索屈服点：A-1-2-A′

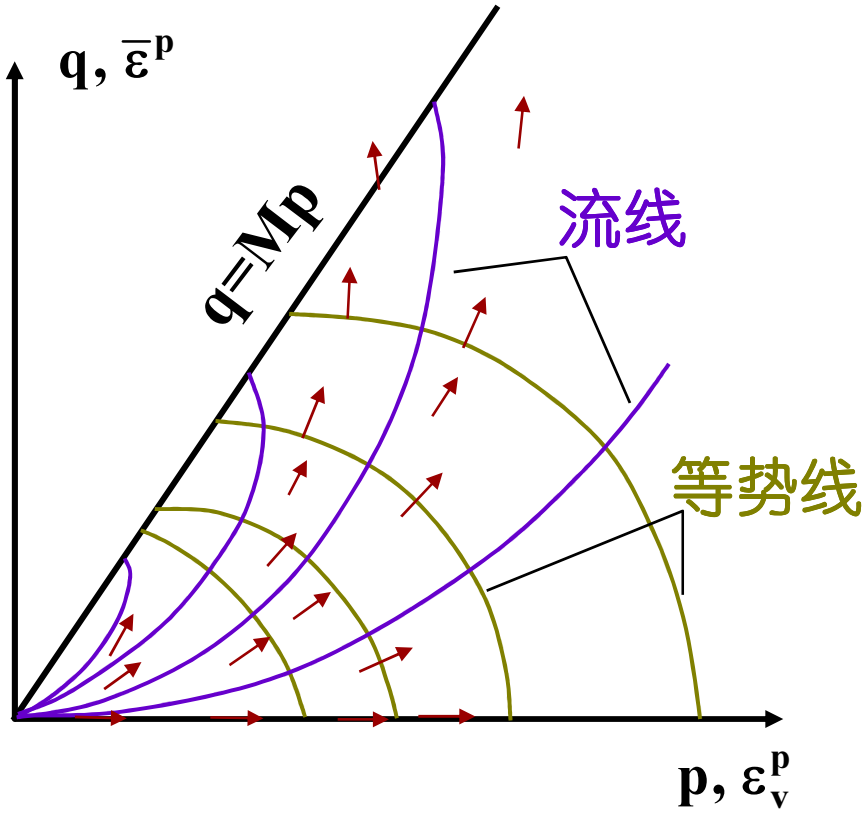


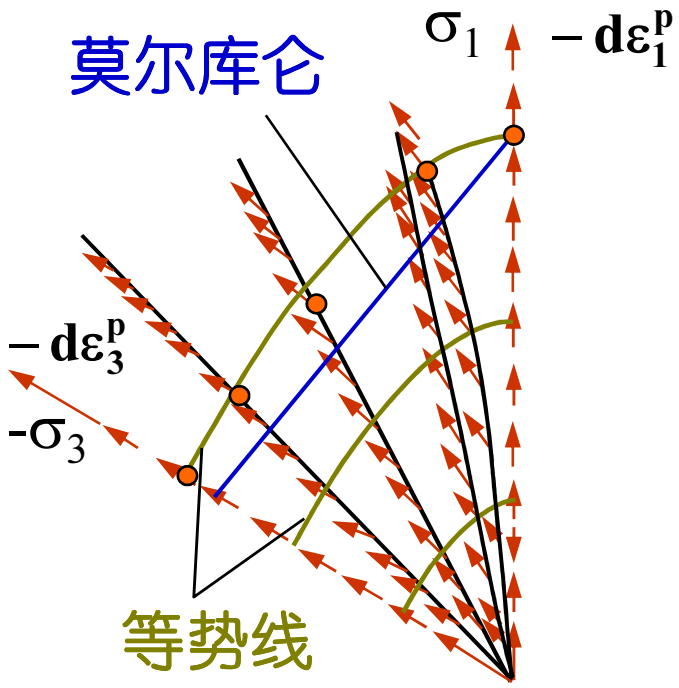


土的屈服面与屈服轨迹的确定

P78
5

■ 三轴试验与真三轴试验确定塑性应变增量方向





土的屈服面与屈服轨迹的确定

P79

1. 流动规则 (flow rule)

2. 硬化定律 (strain-hardening law)

流动规则与硬化定律

P79
2.5.3

■ 流动规则（flow rule）：用以确定塑性应变增量向量方向（各个分量间的比例关系）的规则

- 塑性势面g ：（密塞斯，1928）塑性变形（流动）同其他性质的流动一样，是由某种势的不平衡所引起
- 正交规则：塑性应变增量向量正交于塑性势面g

$$d\varepsilon^{P}_{ij} = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}$$

一点塑性应变增量的方向唯一，只与该点的总应力状态有关，与施加的应力增量的方向无关

流动规则

P79

- Drucker公设（1952）：稳定材料在施加与卸去一应力增量的应力循环过程中，附加外力所作的功不为负

$$d\sigma_{ij}d\varepsilon^{P}_{ij} \geq 0$$

- 屈服面必须是外凸的
- 塑性应变增量的方向必须正交于屈服面

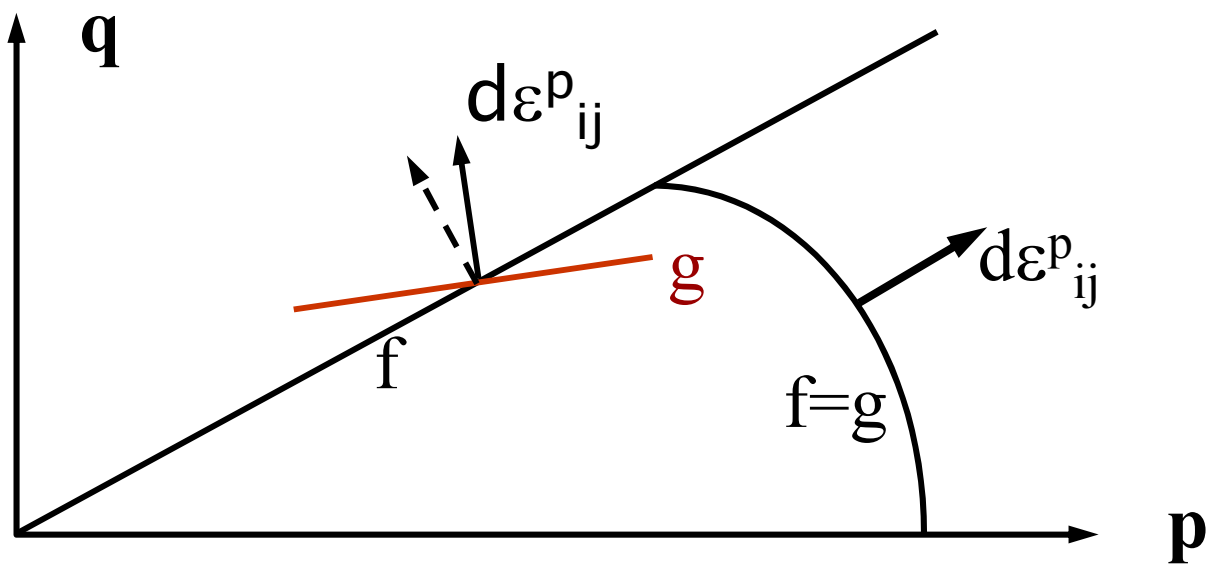
流动规则

P79

- 相适应（相关联）的流动规则（Associated flow rule）：根据Drucker假说，塑性势面必须与屈服面重合，即f=g
- 不相适应（不相关联）的流动规则（Nonassociated flow rule）：塑性势面不必与屈服面重合f≠g

流动规则

P79



☞ 锥形屈服面与帽子屈服面，表现土的塑性剪胀与剪缩，锥形屈服面会使剪胀量过大，一般采用不相适应的流动规则

流动规则

P79

- 加工（应变）硬化定律 (strain-hardening law)：是确定在一定的应力增量作用下引起的塑性应变增量大小的准则。亦即确定dλ大小的定律

☞ 硬化参数$H(\varepsilon^p_{ij})$: 是土在发生了一定的塑性应变后，其排列与组构变化的尺度

- 塑性变形功 ： $W_p \approx \int \sigma_{ij} d\varepsilon^P{}_{ij}$ ⇒ Lade-Duncan模型
- 塑性体应变 ： $H\left(\varepsilon_v^p\right)$ ⇒ 剑桥模型
- 塑性体应变和塑性剪应变： $H\left(\bar{\varepsilon}^P, \varepsilon_v^p\right)$ ⇒ 清华弹塑性模型

加工（应变）硬化定律

P802

$$f(\sigma_{ij}, H) = 0$$

屈服面方程

$$df = \left\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right\}^T \cdot \{d\sigma\} + \frac{\partial f}{\partial H} \cdot dH = 0$$

$$\left\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right\}^T \cdot \{d\sigma\} + \frac{\partial f}{\partial H} \cdot \left\{\frac{\partial H}{\partial \varepsilon^p}\right\}^T \cdot \{d\varepsilon^p\} = 0$$

$$\left\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right\}^T \cdot \{d\sigma\} + \frac{\partial f}{\partial H} \cdot \left\{\frac{\partial H}{\partial \varepsilon^p}\right\}^T \cdot d\lambda \cdot \left\{\frac{\partial g}{\partial \sigma}\right\} = 0$$

$$d\lambda = -\frac{\left\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right\}^T \cdot \{d\sigma\}}{\frac{\partial f}{\partial H} \cdot \left\{\frac{\partial H}{\partial \varepsilon^p}\right\}^T \cdot \left\{\frac{\partial g}{\partial \sigma}\right\}}$$

→ A：塑性硬化模量

加工（应变）硬化定律

P80

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^{e} + d\varepsilon_{ij}^{p}$$

增量形式的胡克定律

增量形式的塑性理论

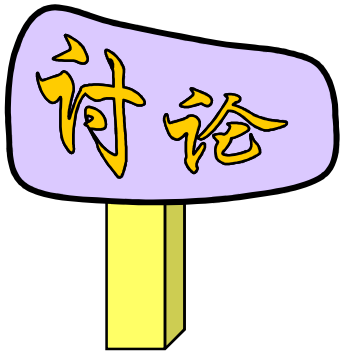
$$\{d\sigma\} = [D]_{ep}\{d\varepsilon\}$$

$$[D]_{ep} = [D] - \frac{[D]\cdot\left\{\frac{\partial g}{\partial \sigma}\right\}\cdot\left\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right\}^{T}\cdot[D]}{A + \left\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right\}^{T}\cdot[D]\cdot\left\{\frac{\partial g}{\partial \sigma}\right\}}$$

☞ 对于相适应流动规则g=f，矩阵对称

弹塑性矩阵

P81
2.5.4

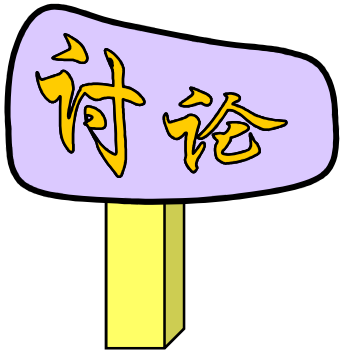


弹性与塑性模型的变形方向？

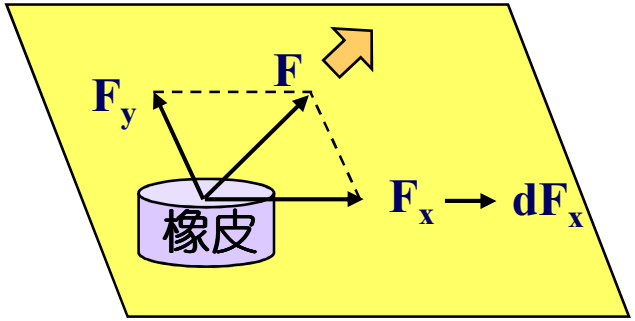
- 弹性理论：应变增量的方向取决于应力增量的方向，和所处的总的应力状态无关
- 塑性理论：应变增量的方向取决于屈服面（总的应力状态），和应力增量的方向无关

举例说明上述弹性和塑性变形方向的特点，据此说明塑性理论对何种工程问题更具有本质上的优势？

P81



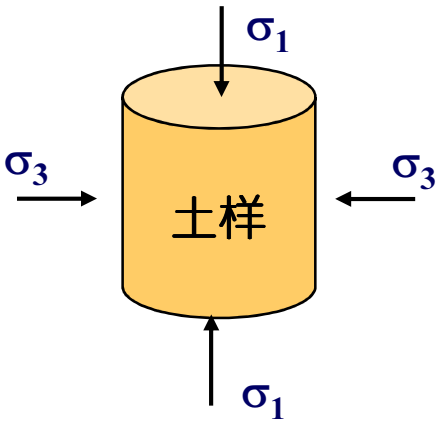
实例一：桌面上受力的橡皮



滑动前 → 变形方向取决于应力增量的方向

滑动后 → 变形方向取决于总的应力状态

实例二：处于极限状态的三轴试样



σ_1↑ → 沿摩尔库仑剪切面剪切破坏

σ_3↓ → 沿摩尔库仑剪切面剪切破坏

→ 土体的破坏取决于总的应力状态

第二章 土的本构关系

2.1 概述 √

2.2 应力和应变 √

2.3 土的应力变形特性 √

2.4 土的弹性模型 √

2.5 土的弹塑性模型的一般原理 √

2.6 剑桥模型(Cam—Clay)

2.7 其它典型弹塑性模型

2.8 土的损伤模型

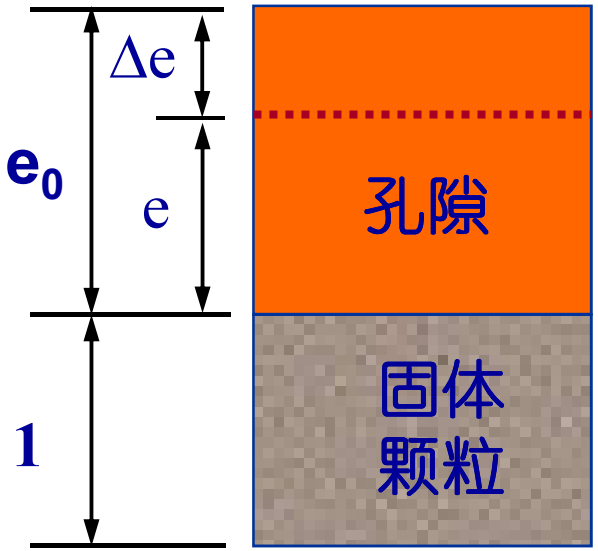
2.9 土的广义位势理论

P82

2.6 土的剑桥模型 (Cambridge Model—Cam-clay)

- 正常固结粘土的物态边界面 (state boundary surface)
- 超固结土及完全的物态边界面
- 弹性墙与剑桥模型的屈服函数
- 修正的剑桥模型

■ 三轴应力状态：



- 偏应力：　$q=\sigma_1-\sigma_3$
- 平均主应力：　$p=(\sigma_1+2\sigma_3)/3$
- 比体积：　$v=1+e$

  $\Delta v=-\Delta e$
- 体应变：　$\varepsilon_v=-\Delta e/(1+e_0)$

- 对饱和正常固结粘土，有效应力~密度~抗剪强度存在唯一性关系：

  - 存在单一的有效应力强度包线
  - 破坏时含水量（孔隙比）和强度间存在唯一性关系
  - 土体有效应力和含水量（孔隙比）间存在唯一性关系

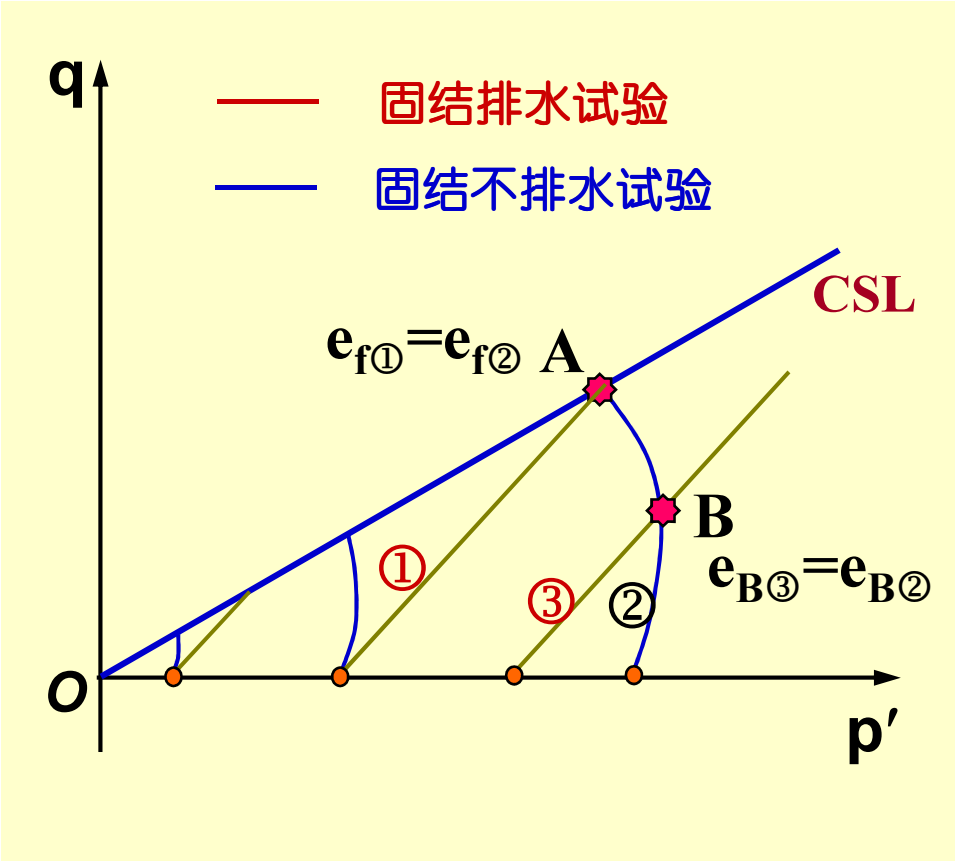
Rendulic(1937)
Henkel(1960)等

和试验的类型及应力路径等无关

- 对具有相同的前期固结压力的超固结土也有相似的规律

粘性土有效应力~密度~抗剪强度间的唯一性关系

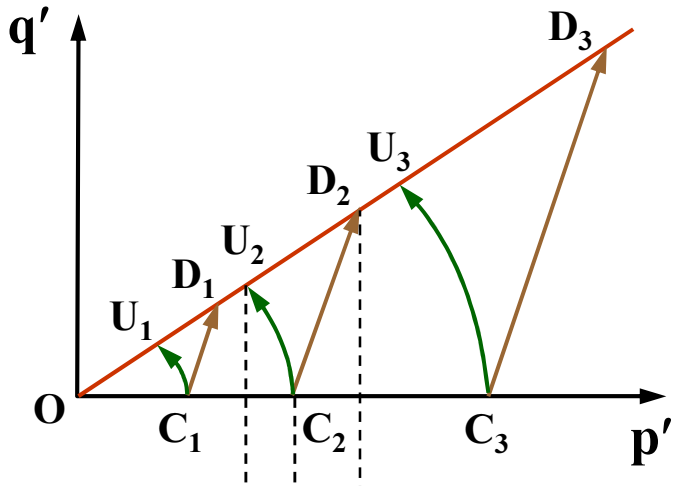
P82



- 两种试验：相同的破坏线- 临界状态线**CSL**: **Critical State Line**
- 破坏线上，强度和孔隙比存在唯一性关系
- 有效应力和孔隙比间存在唯一性关系

粘性土有效应力~密度~抗剪强度间的唯一性关系

P83



NCL: Normal Consolidation Line

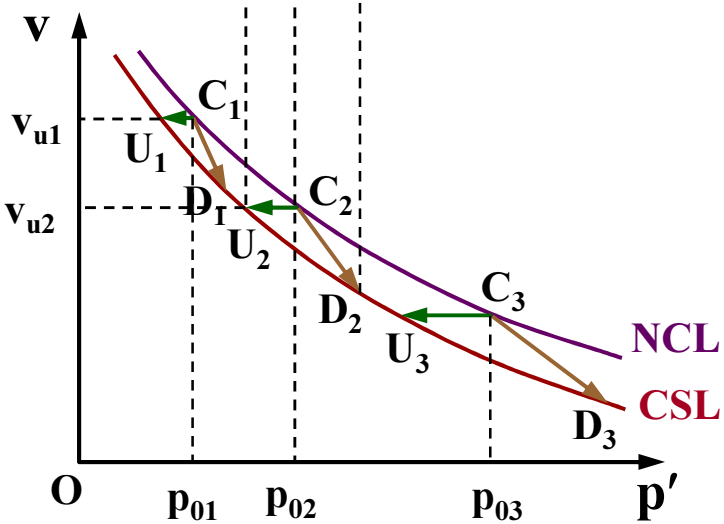
CSL: Critical State Line

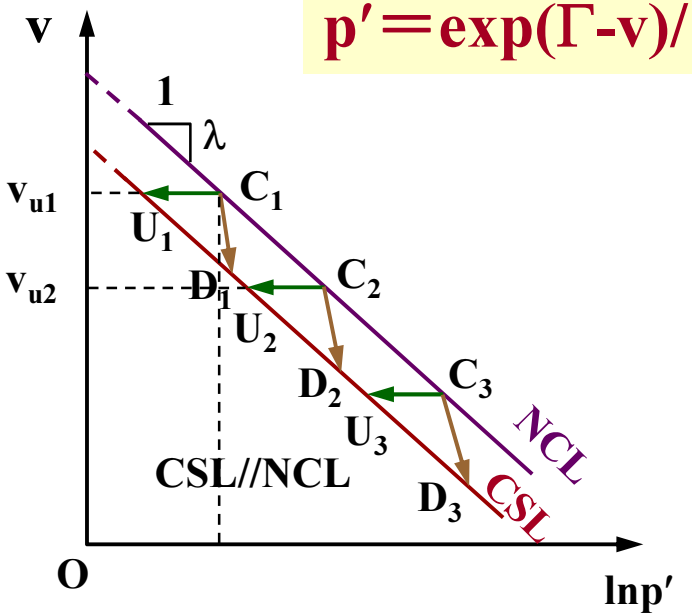
$q=M\,p'$

$v=N-\lambda \ln p'$（NCL)

$v=\Gamma-\lambda \ln p'$ (CSL)

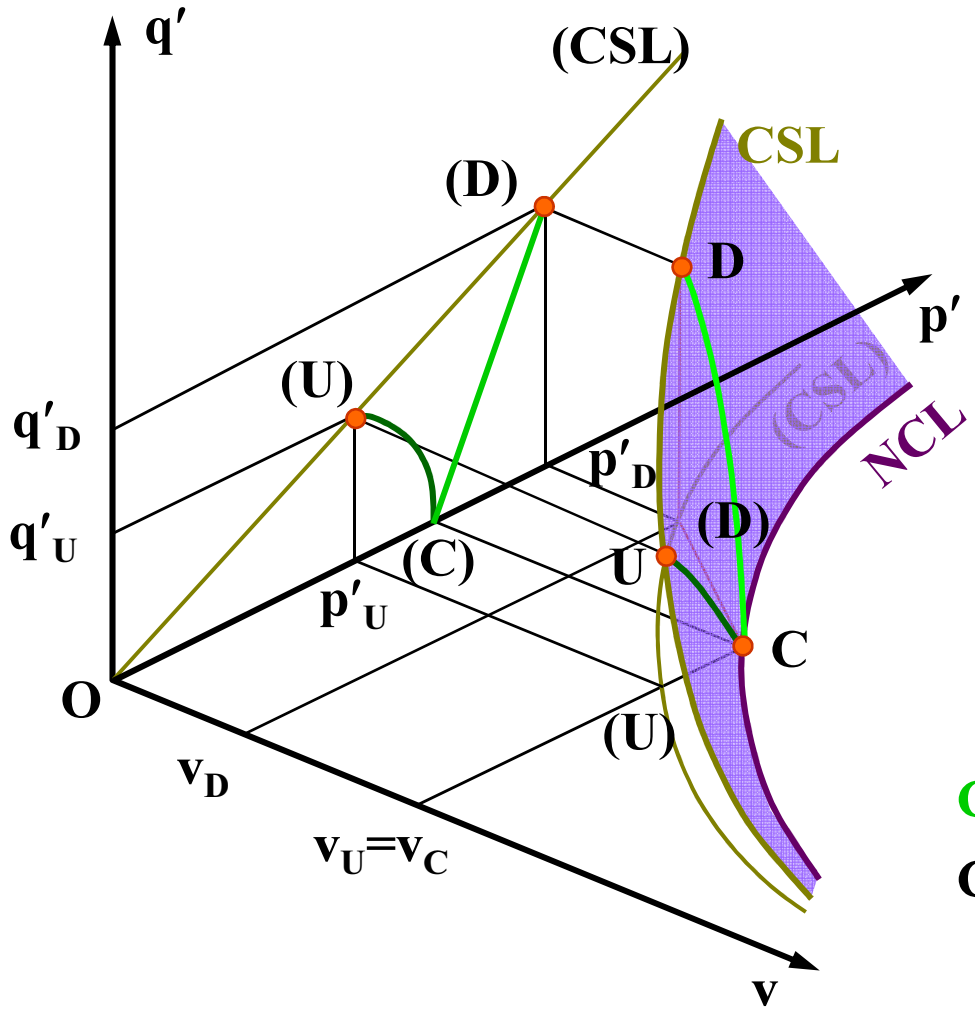
$p'=\exp(\Gamma-v)/\lambda$





正常固结粘土的NCL和CSL

P83



临界状态线CSL：

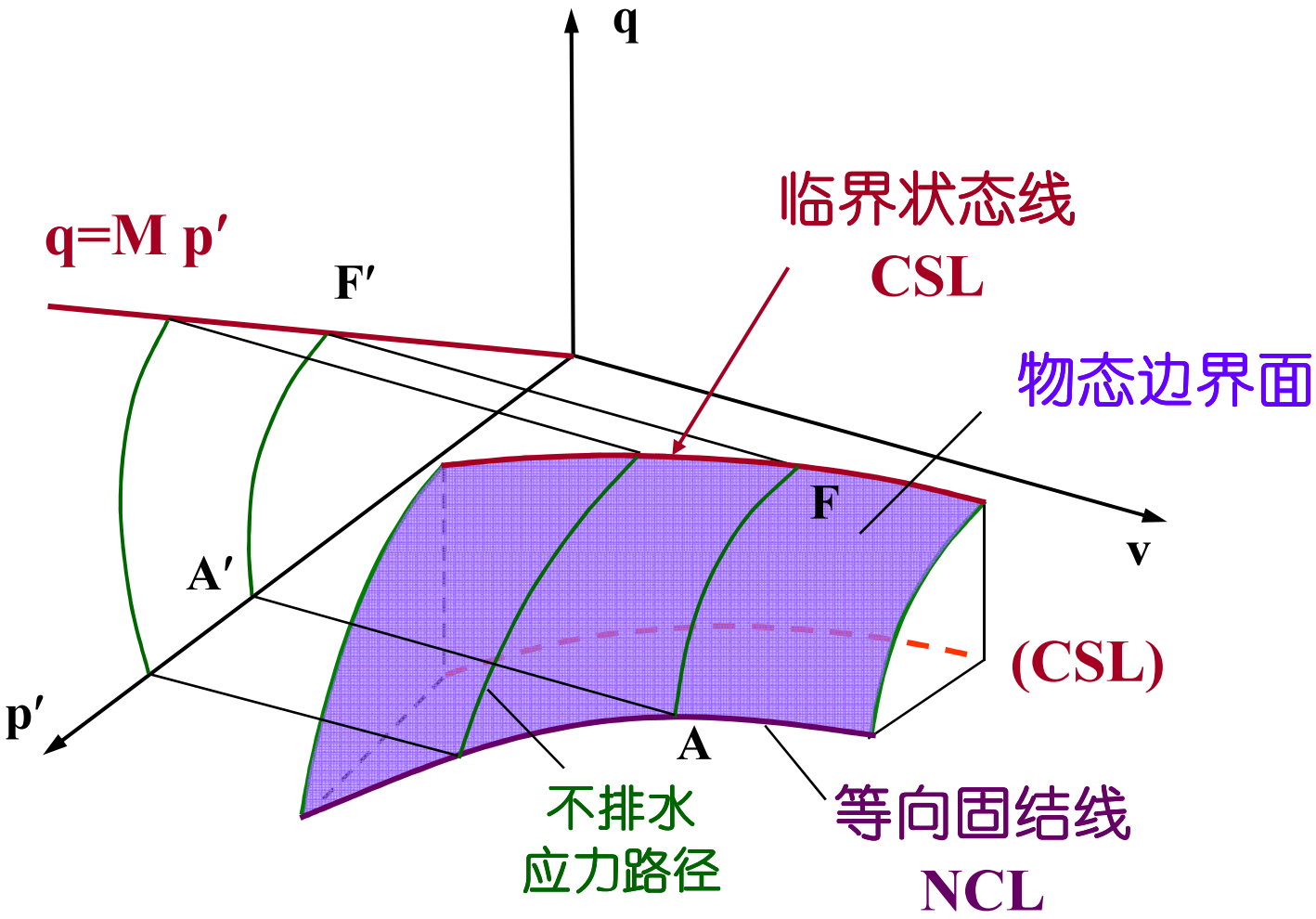
$q=M\,p'=M\exp(\Gamma-v)/\lambda$

物态边界面（罗斯柯面）
state boundary surface
p′-q-v唯一关系，以NCL和CSL为边界的空间曲面

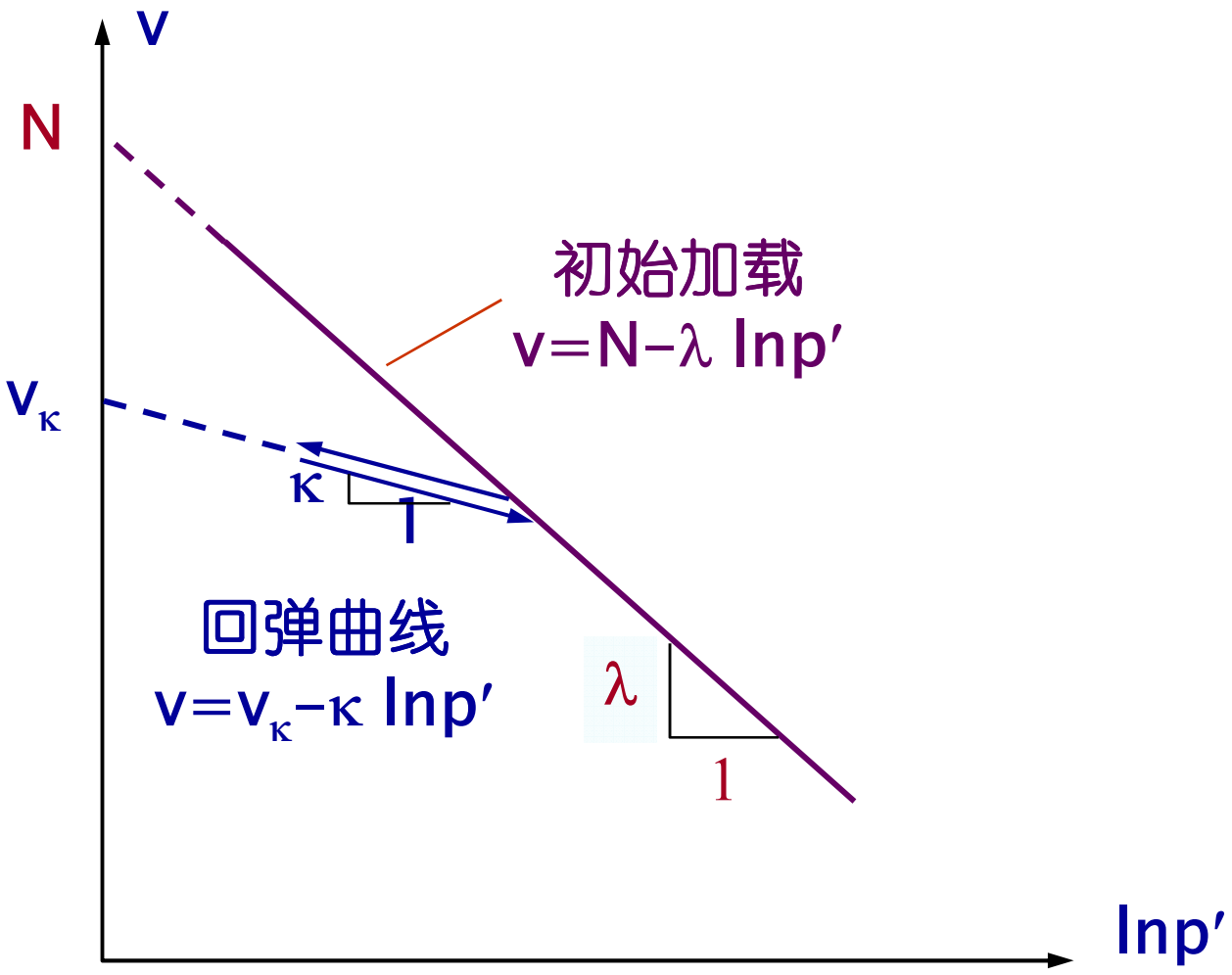
CU=不排水应力路径

CD=排水应力路径

物态边界面与临界状态线P84



三维空间的物态边界面 P84



各向等压的加载与卸载

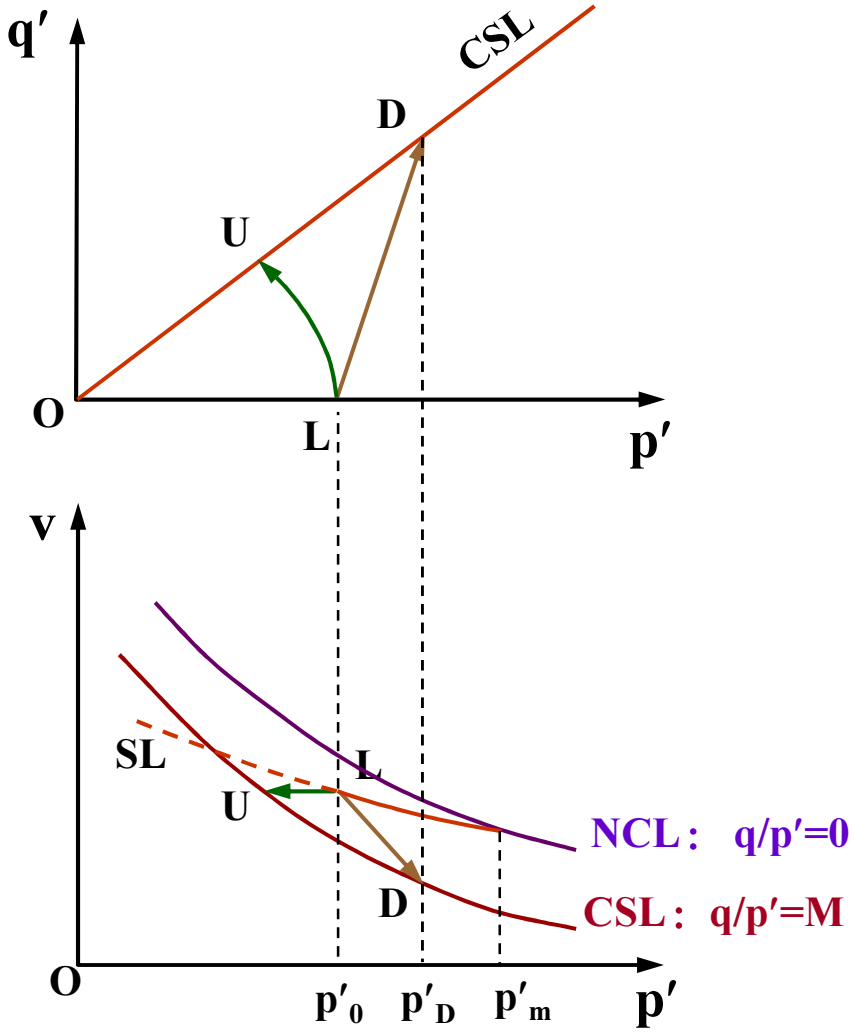
P84

- 正常固结粘土
- 轻超固结粘土：OCR比较小，卸载范围不大
- 强超固结粘土：OCR很大，卸载后的应力比先期固结应力小很多

超固结土及完全的物态边界面

P84

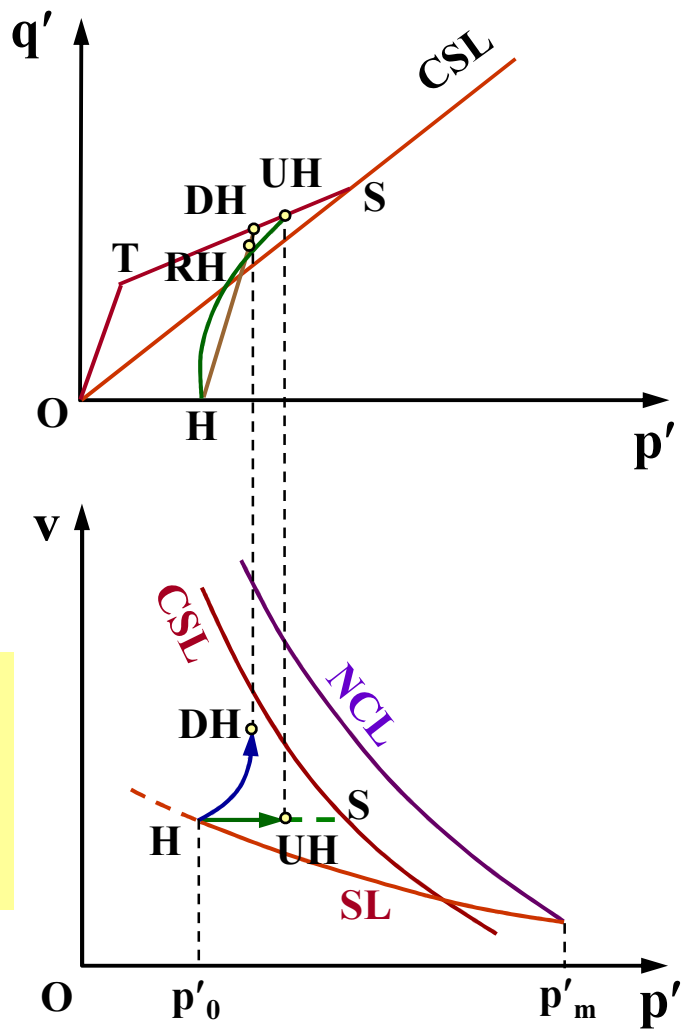
- 先期固结应力p'_m
- *L*位于*NCL*和*CSL*之间。亦即其含水量状态比对应的临界状态下更“湿”
- LU：不排水，体积不变
- LD：排水试验，体缩
- 强度线：正常固结*CSL*



轻超固结粘土的临界状态

P85

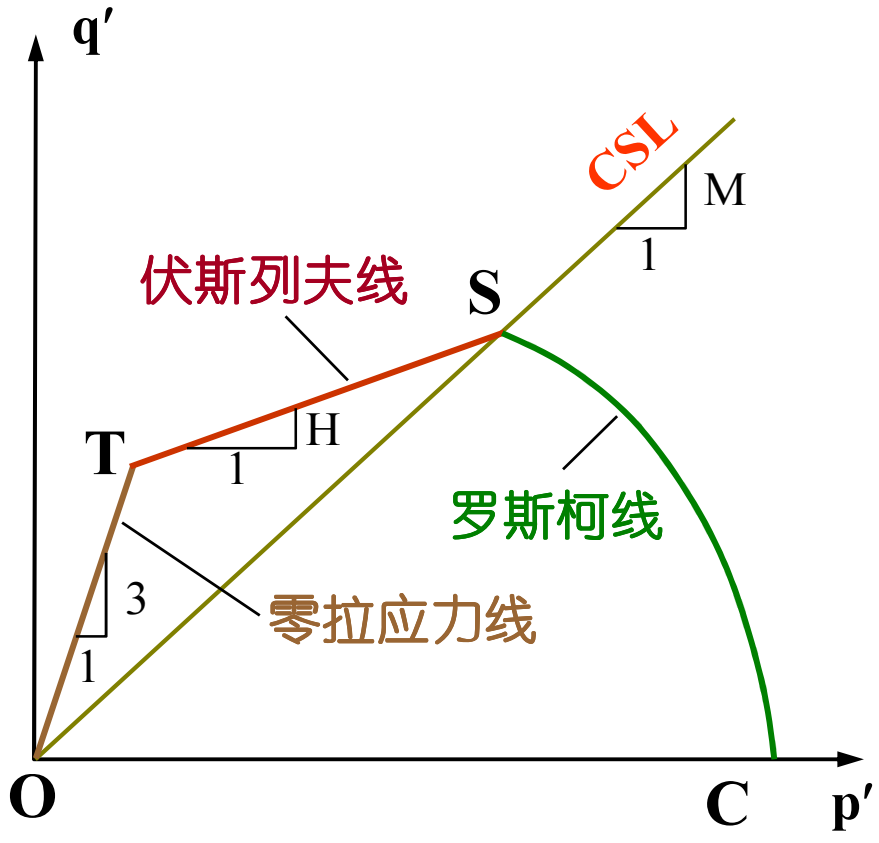
- 先期固结应力p'_m
- *H* 在正常固结*CSL*线之外
- LU：不排水，H-UH-S
- LD：排水，体胀，H-DH-RH
- 强度线：峰值强度*TS*，超过正常固结*CSL*



*TS*代表了物态边界面的一部分，它控制了重超固结土的破坏或屈服，被称为**Hvorslev**线

重超固结粘土的临界状态

P86



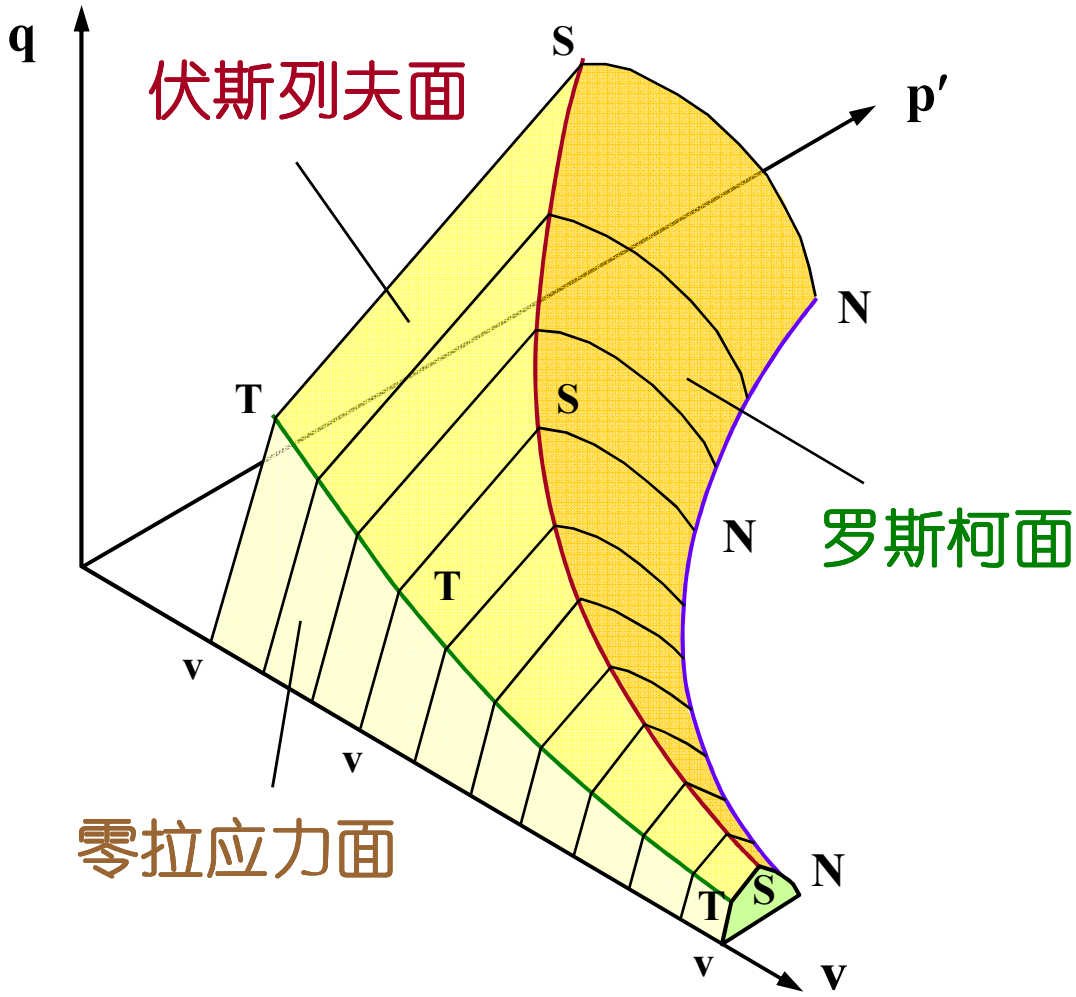
完全的物态边界面：

- OT：无拉应力线
- TS：超固结土的强度线-Hvorslev线
- CS：v=常数的Roscoe 线

包括了正常固结土、超固结土的可能的（极限）应力状态

完全的临界物态边界面

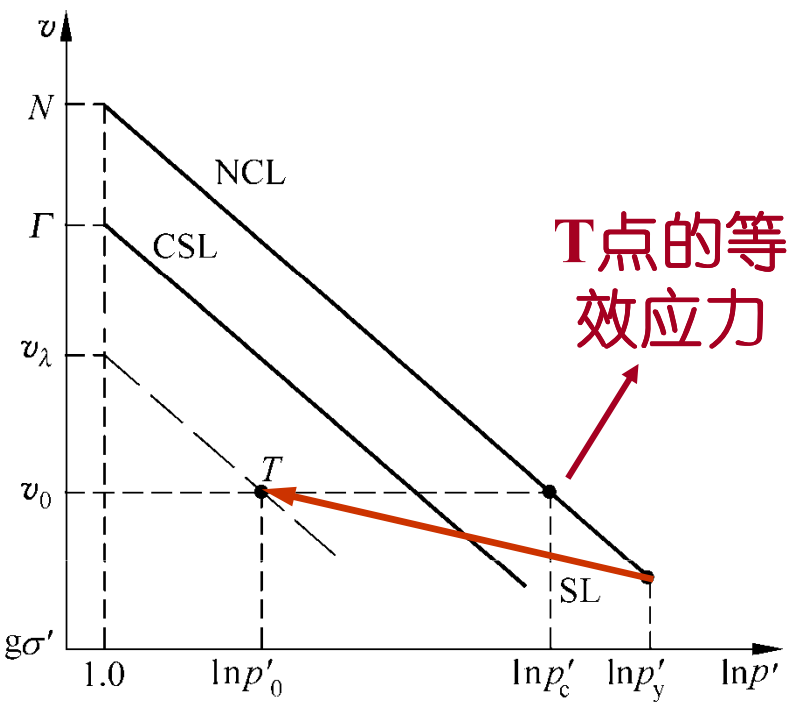
P87

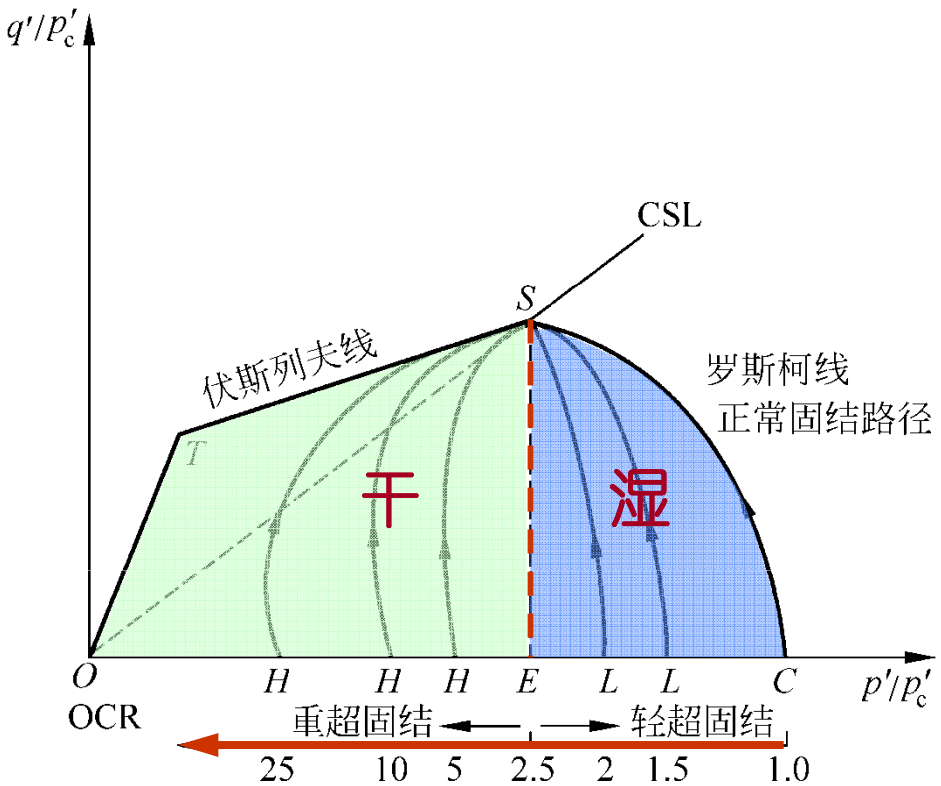


包括超固结土的完全的物态边界面－土体的状态只能在面内和面上

完全的临界物态边界面

P88



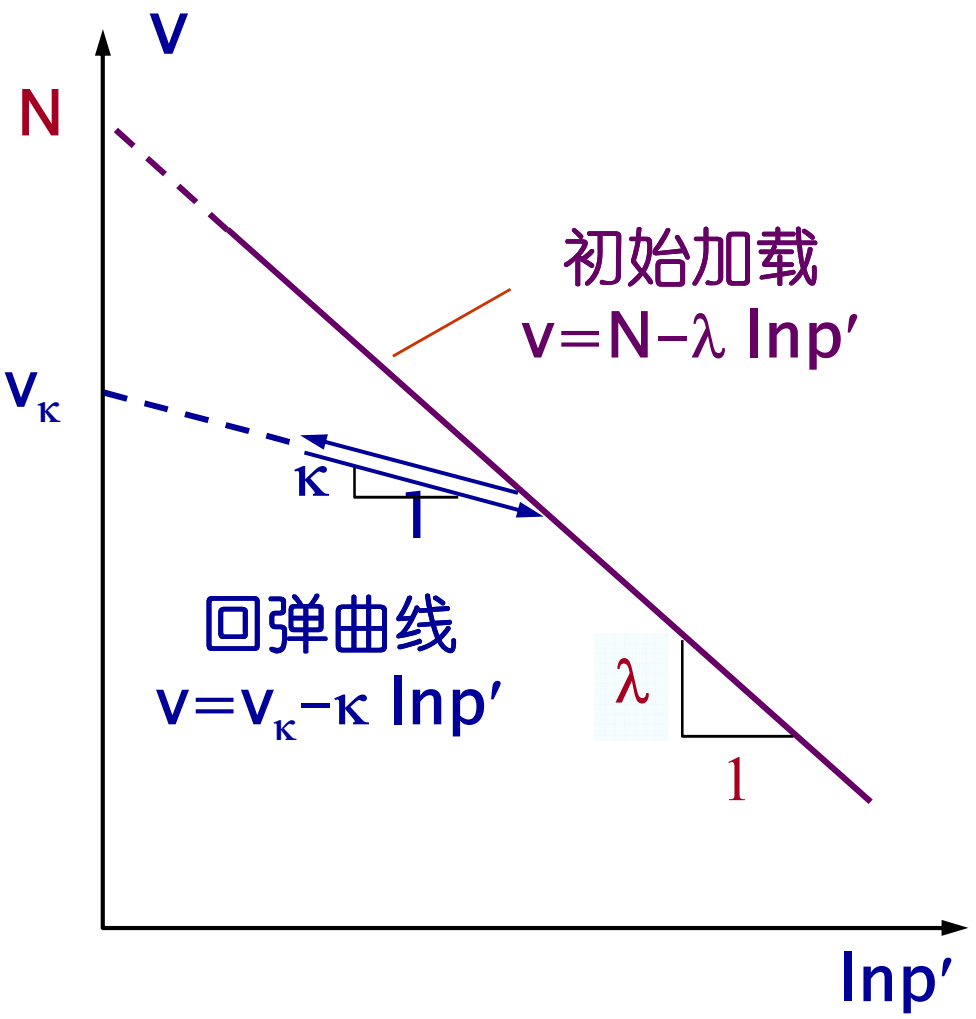


各向等压加载与卸载试验

超固结比对不排水
应力路径的影响

正常（超）固结土的应力路径

P88



正常固结粘土与
轻超固结粘土
(wet clay)

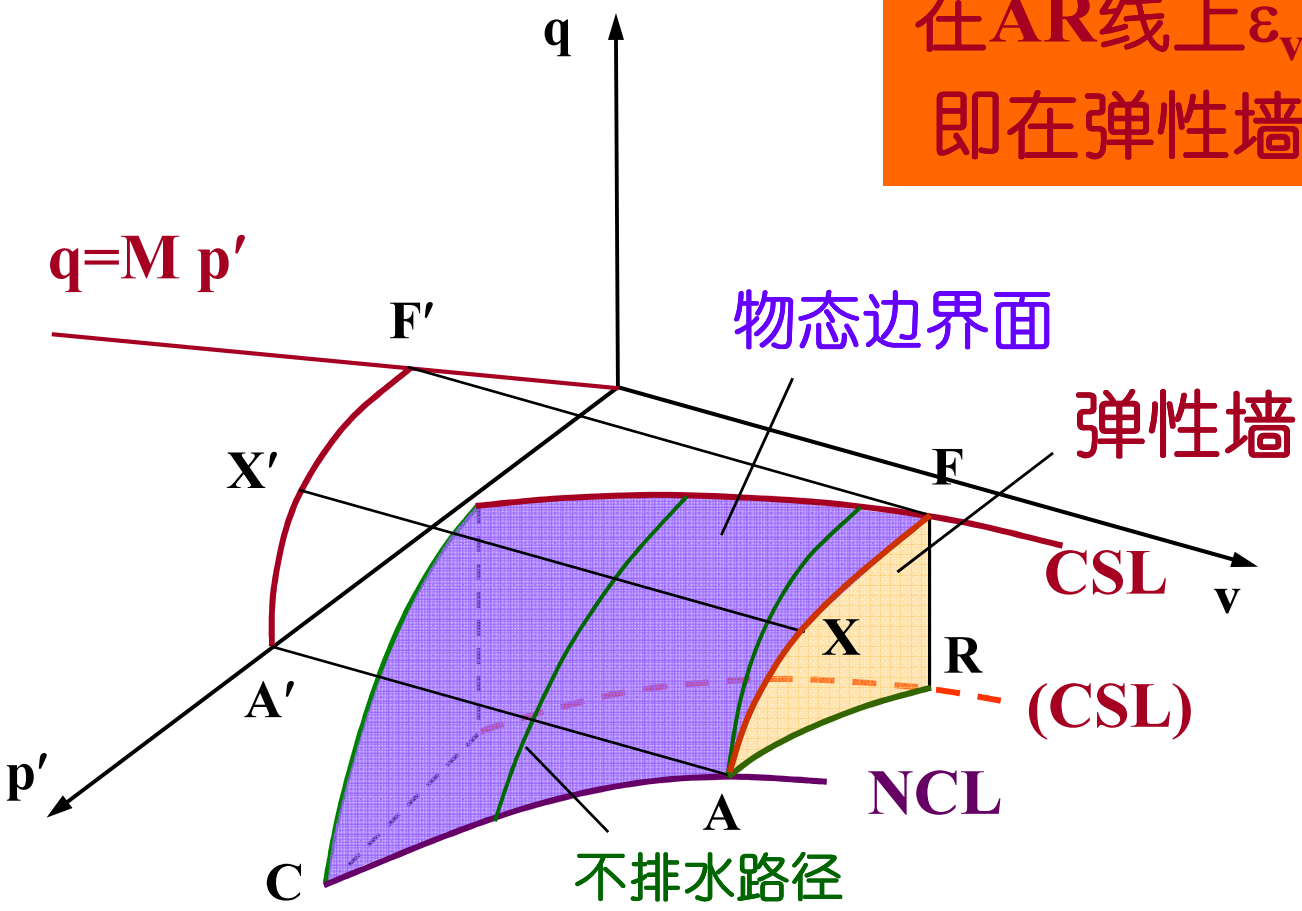
各向等压固结:
- 加载 – NCL
- 卸载 – 回弹曲线

弹性墙

弹 性 墙

P88

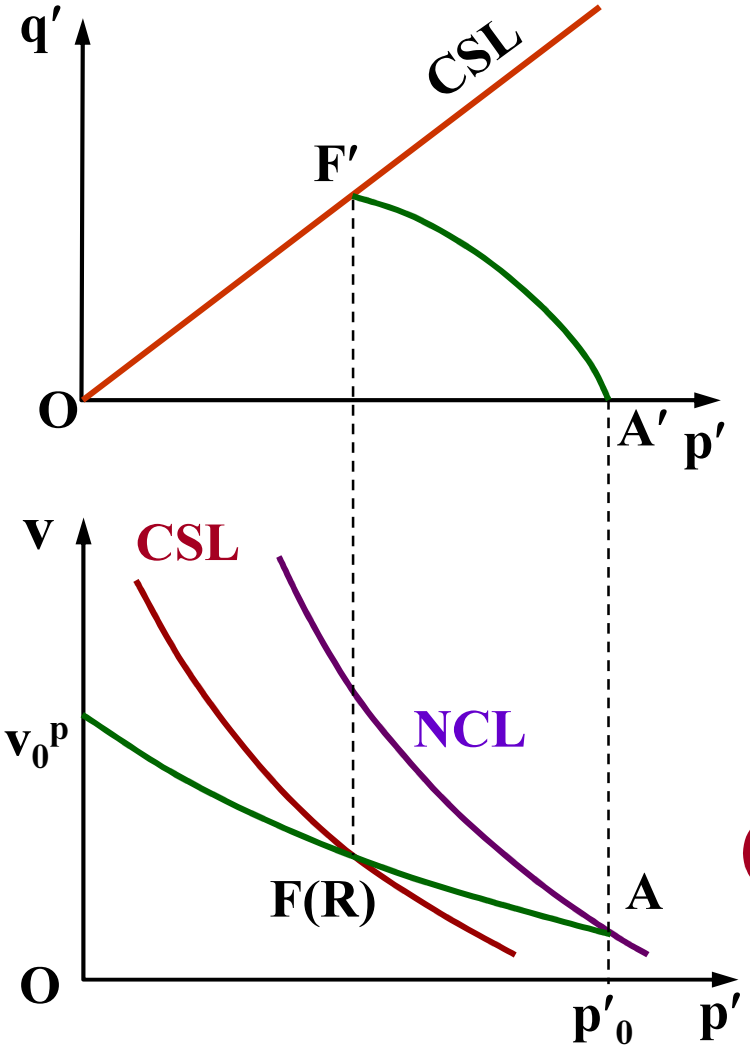
在AR线上ε_v^p无变化，亦即在弹性墙上ε_v^p为常数



三维空间的弹性墙

P89

弹性墙*ARF*在p′-v平面上的投影。可见其回弹曲线是唯一的，并且与v轴截距代表其塑性比体积v_0^p，在同一弹性墙上（屈服轨迹）上，v_0^p是个常数，或者说其塑性体应变是常数



弹性墙的投影

P89

■ 变形能增量： $dE = p'd\varepsilon_V + q'd\bar{\varepsilon}$

☞ 变性能＝弹性变性能＋塑性变性能

$$dE = dW^e + dW^p$$

其中：

$$dW^e = pd\varepsilon_v^e + qd\bar{\varepsilon}^e$$

$$dW^p = pd\varepsilon_v^p + qd\bar{\varepsilon}^p$$

能量方程

P89

1）假设一切剪应变是不可恢复的，亦即 $d\bar{\varepsilon}^e = 0$

☞ 回弹曲线: $v=v_\kappa-\kappa \ln p'$

$$dv^e = -\kappa \frac{dp'}{p'}$$

$$d\varepsilon_v^e = -\frac{dv^e}{1+e} = \frac{\kappa}{1+e}\frac{dp'}{p'}$$

$$dW^e = p' d\varepsilon_v^e = \frac{\kappa}{1+e} dp'$$

2）假定塑性变性能增量可表示为：

$$dW^p = Mp' d\bar{\varepsilon}^p = Mp' d\bar{\varepsilon}$$

弹塑性变性能的基本假设

P90

■ 变形能增量：　$dE = dW^e + dW^p$

$$dE = dW^e + dW^p = \frac{\kappa}{1+e}dp' + Mp'd\bar{\varepsilon} = p'd\varepsilon_v + qd\bar{\varepsilon}$$

$$p'\left(d\varepsilon_v - \frac{\kappa}{1+e}\frac{dp'}{p'}\right) = (Mp' - q)d\bar{\varepsilon}$$

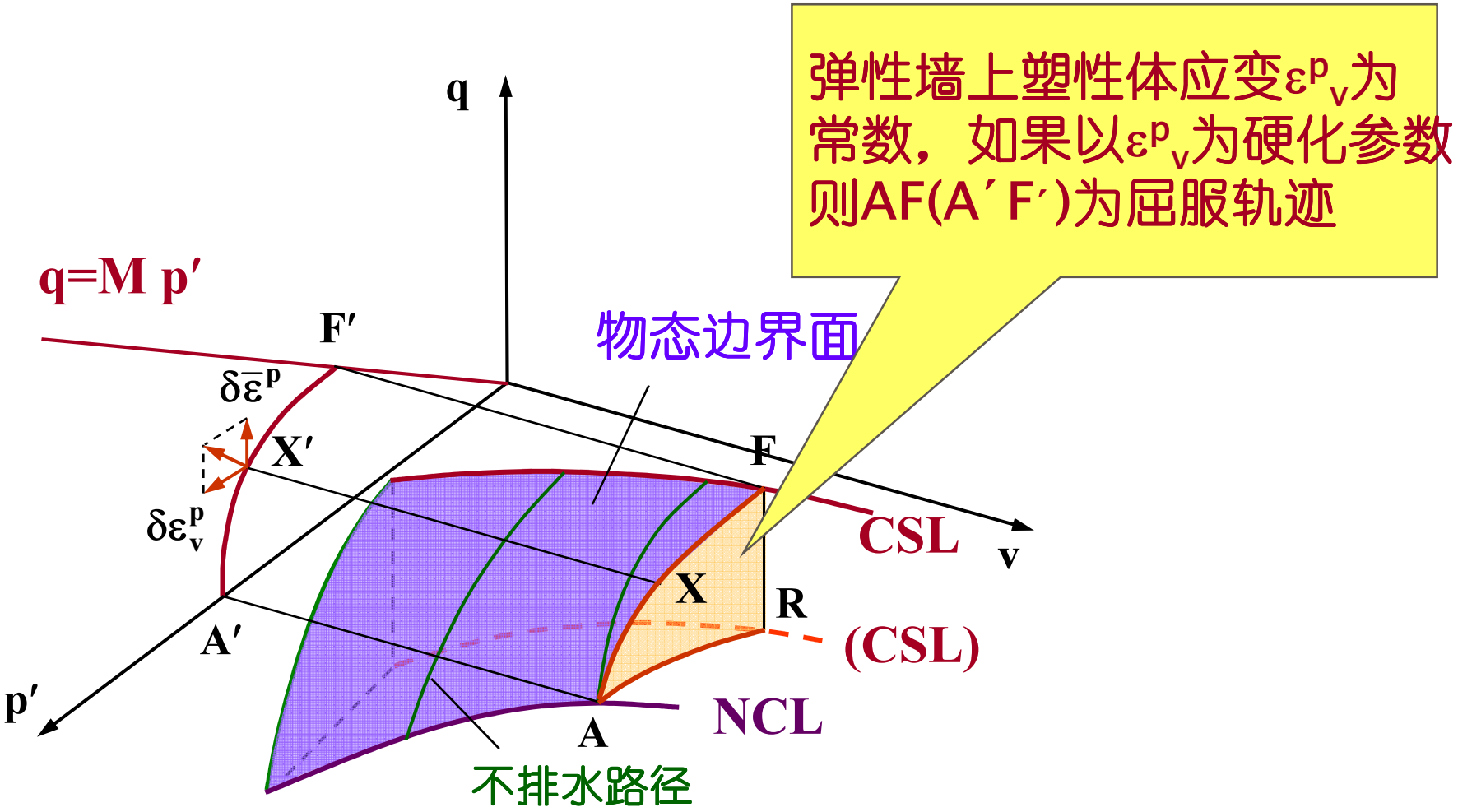
$$p'd\varepsilon_v^p = (Mp' - q)d\bar{\varepsilon}$$

$$\frac{d\varepsilon_v^p}{d\bar{\varepsilon}^p} = M - \frac{q}{p'} = M - \eta$$

流动法则，塑性应变增量的方向和比例

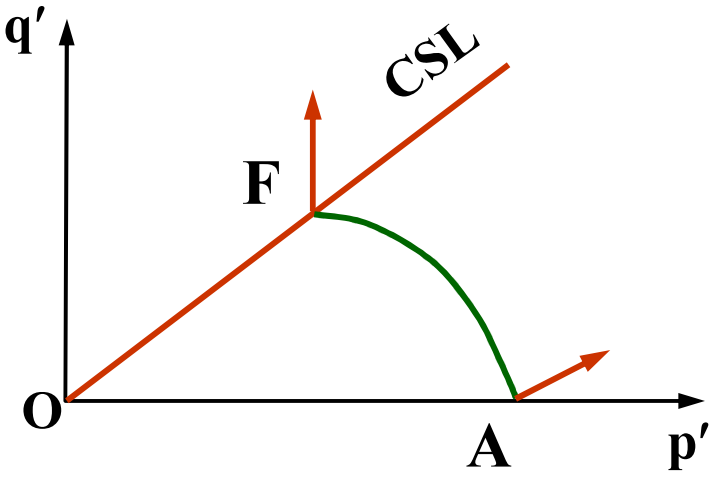
弹塑性变性能

P90



屈服轨迹及表达式

P90



$$\frac{d\varepsilon_v^p}{d\bar{\varepsilon}^p} = M - \frac{q'}{p'} = M - \eta$$

$\eta = M$时，$d\varepsilon_v^p = 0$

$\eta = 0$时，$\dfrac{d\varepsilon_v^p}{d\bar{\varepsilon}^p} = M$

☞ 流动规则　$$\frac{d\varepsilon_v^p}{d\bar{\varepsilon}^p} = -\frac{dq}{dp'}$$

屈服轨迹的微分方程　$$\frac{dq}{dp'} - \frac{q}{p'} + M = 0$$

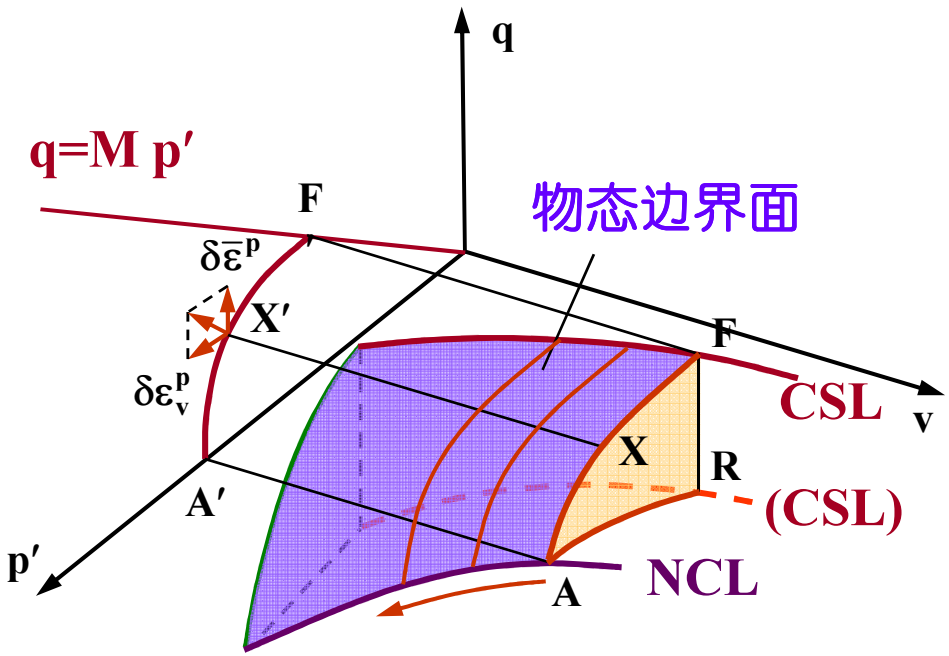
屈服函数　$$f = \frac{q}{p'} - M \ln \frac{p_0'}{p'}$$

p_0'或ε_v^p为硬化参数

屈服轨迹及表达式

P91

☞ 屈服轨迹沿NCL移动，得到三维变量表示的物态边界面方程：



☞ NCL: $v=N-\lambda \ln p'$

☞ 屈服函数:

$$f=\frac{q'}{p'}-M\ln\frac{p'_0}{p'}$$

$$\eta=\frac{q'}{p'}=\frac{M}{\lambda-\kappa}\left(N-v-\lambda\ln p'\right)$$

物态边界面的方程

P92

$$\left.\begin{aligned}\eta &= \frac{q'}{p'} = \frac{M}{\lambda-\kappa}\left(N - v - \lambda \ln p'\right)\\ d\varepsilon_v &= \frac{dv}{1+e}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{d\varepsilon_v = \frac{1}{1+e}\left[\frac{\lambda-\kappa}{M}d\eta + \lambda\frac{dp'}{p'}\right]}$$

$$dE = \frac{\kappa}{1+e}dp' + Mp'd\bar{\varepsilon} = pd\varepsilon_v + qd\bar{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \boxed{d\bar{\varepsilon} = \frac{\lambda-\kappa}{(1+e)Mp'}\left[\frac{dq'}{M-\eta} + dp'\right] = \frac{\lambda-\kappa}{(1+e)}\cdot\frac{p'd\eta + Mdp'}{Mp'(M-\eta)}}$$

“湿粘土”的应力应变关系表达式

P92-93

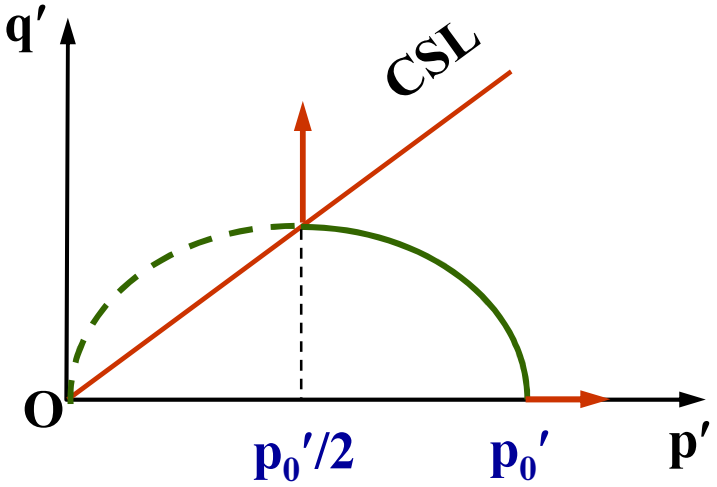
- 剑桥模型通过假设能量方程确定屈服轨迹
- 所得屈服轨迹在$p'-q'$平面上是子弹头形的
- 在等向固结试验（$dp'>0$及$dq'=0$）中，会产生塑性（总）剪应变增量，这显然是不合理的
- 许多试验结果表明，用剑桥模型计算的三轴试验的应力应变关系与试验结果相差较大。在试验前段计算的应变ε_1偏大

修正剑桥模型

P93

■ 勃兰德（Burland） 1965年建议了新的能量方程的形式

$$dW^p = pd\varepsilon_v^p + qd\bar{\varepsilon}^p = p'\sqrt{\left(d\varepsilon_v^p\right)^2 + M^2\left(d\bar{\varepsilon}^p\right)^2}$$



$$\frac{d\varepsilon_v^p}{d\bar{\varepsilon}^p} = \frac{M^2 - \eta^2}{2\eta}$$

$$\frac{dq}{dp'} + \frac{M^2 - \eta^2}{2\eta} = 0$$

$$\left(p' - \frac{p_0'}{2}\right)^2 + \left(\frac{q}{M}\right)^2 = \left(\frac{p_0'}{2}\right)^2$$

修正剑桥模型

P93

■ 应力应变关系

$$d\varepsilon_v = \frac{1}{1+e}\left[(\lambda-\kappa)\frac{2\eta d\eta}{M^2+\eta^2}+\lambda\frac{dp'}{p'}\right]$$

$$d\bar{\varepsilon} = \frac{\lambda-\kappa}{1+e}\cdot\frac{2\eta}{M^2-\eta^2}\left(\frac{2\eta d\eta}{M^2+\eta^2}+\frac{dp'}{p'}\right)$$

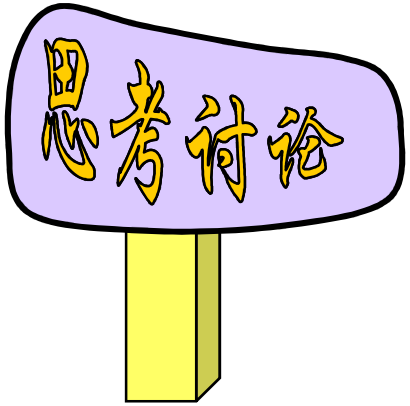
修正剑桥模型

P93

- 建立较早较为完善的塑性模型
- 用修正的模型计算的三轴试验应力应变关系比用原始模型计算的更接近于试验
- 修正模型当η较小时，计算ε_1偏小，为此增加了一个平行于p′的附加屈服面
- 屈服面在三维应力空间中是一个椭球，破坏准则采用莫尔－库仑准则

关于剑桥模型的讨论

P93



1. 为什么屈服轨迹是弹性墙在p′-q平面上的投影而不是固结不排水有效应力路径的投影？弹性墙是客观存在吗？
2. 为什么在剑桥模型中引进塑性应变能的假设？建立塑性模型必须作出该假定吗？

关于剑桥模型的讨论

P93

第二章 土的本构关系

2.1 概述 √

2.2 应力和应变 √

2.3 土的应力变形特性 √

2.4 土的弹性模型 √

2.5 土的弹塑性模型的一般原理 √

2.6 剑桥模型(Cam—Clay) √

2.7 其它典型弹塑性模型

2.8 土的损伤模型

2.9 土的广义位势理论

- Lade-Duncan模型
- 清华弹塑性模型
- 沈珠江双屈服面模型

三个有代表的土的弹塑性模型，也是70—90年代土的本构关系研究中杰出的成果

■ 模型主要特点

- 采用不相适应的流动准则
- 以塑性功W_p为硬化参数
- 过坐标原点的射线屈服轨迹－圆锥形屈服面
- 主要适用于砂土：较好的反映了砂土的破坏和剪胀性

Lade-Duncan模型

P96

■ 弹性应变的确定

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^{e} + d\varepsilon_{ij}^{p}$$

$$E = k_{ur} p_a \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)^n$$

假设泊松比ν=常数

有关常数通过三轴试验的初始模量确定

Lade-Duncan模型

P97

■ 破坏面、屈服面、塑性势函数式

☞ 破坏面函数：　$f_1 = I_1^3 / I_3 = k_f$

☞ 屈服函数：　$f = I_1^3 / I_3 = k \qquad k < k_f$

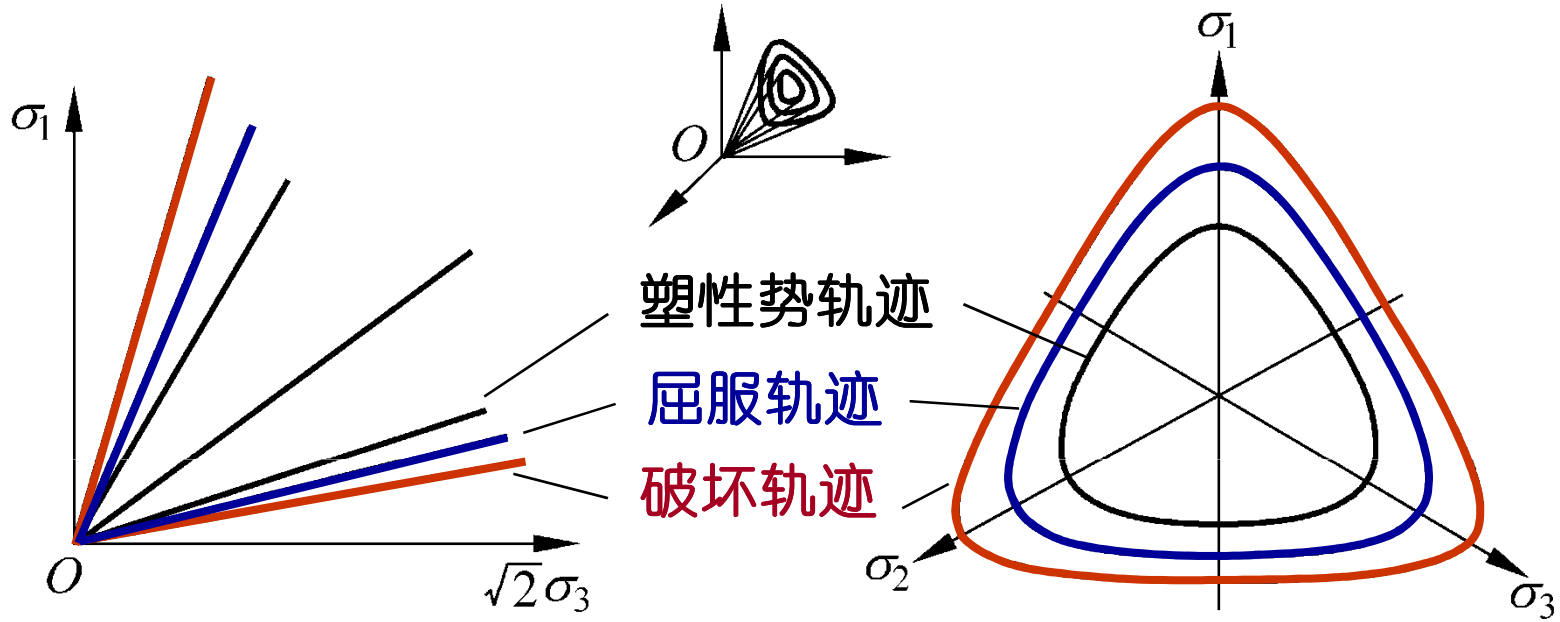
☞ 塑性势函数：　$g = I_1^3 - k_2 I_3 = 0$

$k \neq k_2$，采用不相适应的流动规则

Lade-Duncan模型

P97

■ 破坏面、屈服面、塑性势面的几何形状



- 破坏、屈服面和塑性势具有相似的形状
- 破坏面为屈服面及塑性势面的外极限

Lade-Duncan模型

P98

■ 硬化参数与应力应变关系

☞ 硬化参数：塑性功Wp

$$W_p = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p$$

$$dW_p = d\varepsilon_{ij}^p \sigma_{ij} = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \sigma_{ij} = d\lambda \cdot 3g$$

三阶齐次方程

☞ 应力应变关系

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{dW_p}{3g} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}$$

Lade-Duncan模型

P98

■ 模型参数及确定

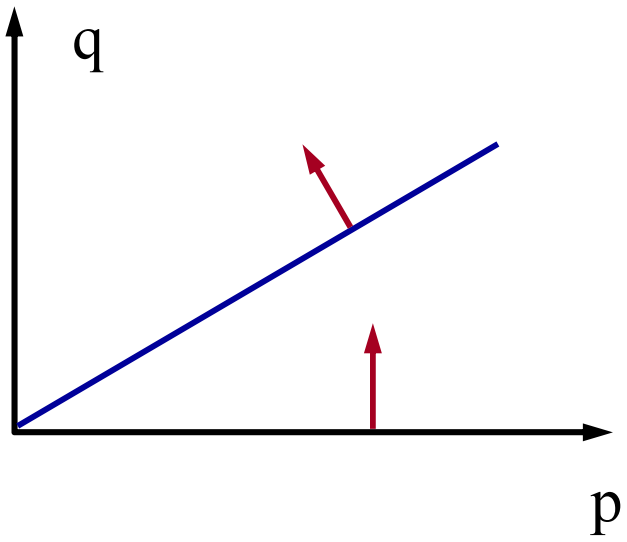
- 弹性参数：ν，K_{ur}，n：三轴试验卸、再加载（或者曲线初始段）曲线
- 强度参数k_f ：试样破坏时$k_f = I_1^3/I_3$
- 塑性势函数中k_2：A
- 硬化参数：塑性功中参数M, l, r_f, f_t

该模型共有9个参数，均可不同围压三轴试验确定（教材p82页）

Lade-Duncan模型

P98

- 原模型的屈服面和塑性势面是开口的锥形，故只会产生塑性剪胀
- 各向等压条件下不会发生屈服及产生塑性应变
- 破坏面、屈服面和塑性势面的子午线是直线



修正Lade-Duncan模型

修正Lade-Duncan模型 P99

- 两套屈服面：圆锥面＋帽子屈服面
- 破坏面、屈服面、塑性势面的子午线是微弯的
- 可反映土的应变软化

修正Lade-Duncan模型

P99

■ 弹性变形与两种塑性应变

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^{e} + d\varepsilon_{ij}^{c} + d\varepsilon_{ij}^{p}$$

塑性剪胀应变:微弯的子午锥面屈服面

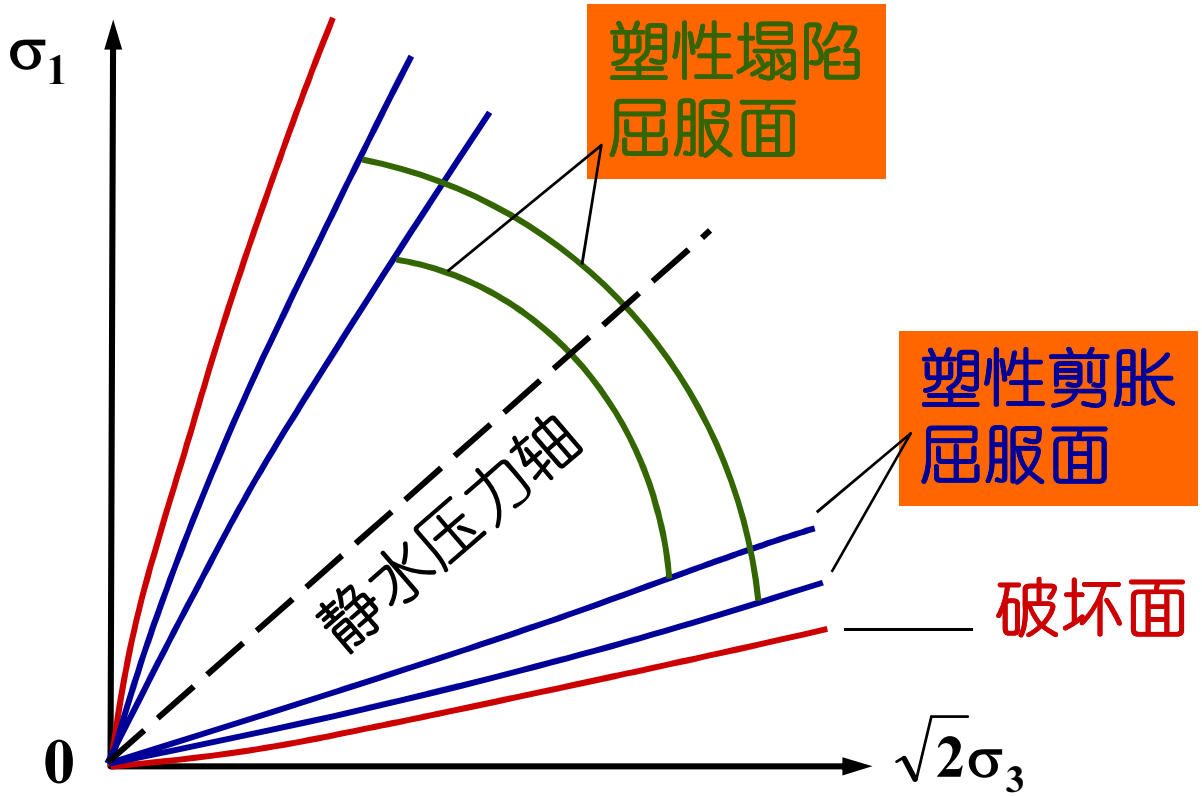
塑性塌陷应变:帽子屈服面

弹性应变：广义胡克定律

修正Lade-Duncan模型

P99

■ 屈服面与破坏面



修正Lade-Duncan模型

P99

■ 塑性塌陷应变 $d\varepsilon_{ij}^{c}$

- 屈服面函数： $f_c = I_1^2 + 2I_2$ （二次齐次方程）
- 硬化参数：塌陷塑性功 $W_c = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^{c}$
- 相适应的流动规则 $d\varepsilon_{ij}^{c} = d\lambda_c \dfrac{\partial f_c}{\partial \sigma_{ij}}$
- 应力应变关系： $dw_c = \sigma_{ij} d\lambda_c \dfrac{\partial f_c}{\partial \sigma_{ij}} = d\lambda_c \sigma_{ij} \dfrac{\partial f_c}{\partial \sigma_{ij}} = d\lambda_c 2f_c$

$$d\lambda_c = \frac{dW_c}{2f_c}$$

修正Lade-Duncan模型

P99

■ 塑性剪胀应变 $d\varepsilon_{ij}^{p}$

- 破坏面方程：$\eta_1 = \left(I_1^3 / I_3 - 27\right)\left(I_1 / p_a\right)^m$
- 屈服面方程：$f_p = \left(I_1^3 / I_3 - 27\right)\left(I_1 / p_a\right)^m$
- 塑性势方程：$g_p = I_1^3 - \left(27 + \eta_2\left(\frac{p_a}{I_1}\right)^m\right) I_3$
- 硬化参数：塑性功Wp　$W_p = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^{p}$

采用不相适应的流动规则

修正Lade-Duncan模型

P100

■ 模型参数及确定

- 弹性参数：ν，K_{ur}，n ➡ 三轴卸载试验
- 塌陷塑性功W_c：c, p ➡ 等向固结试验
- 强度参数：η_1, m ➡ 三轴压缩试验
- 塑性剪胀势函数η_2：S, R, t ➡三轴压缩试验
- 剪胀塑性功Wp：P, l, α, β ➡三轴压缩试验

该模型共有14个参数，可由等向固结和常规三轴试验确定（教材p101-102页）

修正Lade-Duncan模型

P101

清华弹塑性模型

- 弹性变形
- 屈服面的确定
- 硬化参数的确定
- 模型的三维形式

由黄文熙、濮家骝、李广信等于20世纪80年代提出，获国家自然科学三等奖

其主要特点为：不首先假设屈服面函数和塑性势函数，而是根据试验确定塑性应变增量的方向，然后按照相适应流动规则确定其屈服面；再从试验结果确定其硬化参数。因而这是一个假设最少的弹塑性模型

清华弹塑性模型

P102

■ 弹性变形 K, G

$$K = K_0 p$$

各向等压试验

$$G = G_0 p_a \left(\frac{\sigma_3}{p_a} \right)^n$$

常规三轴试验

清华弹塑性模型

P102

■ 塑性应变的确定

$$\varepsilon_v^p = \varepsilon_v - \varepsilon_v^e$$

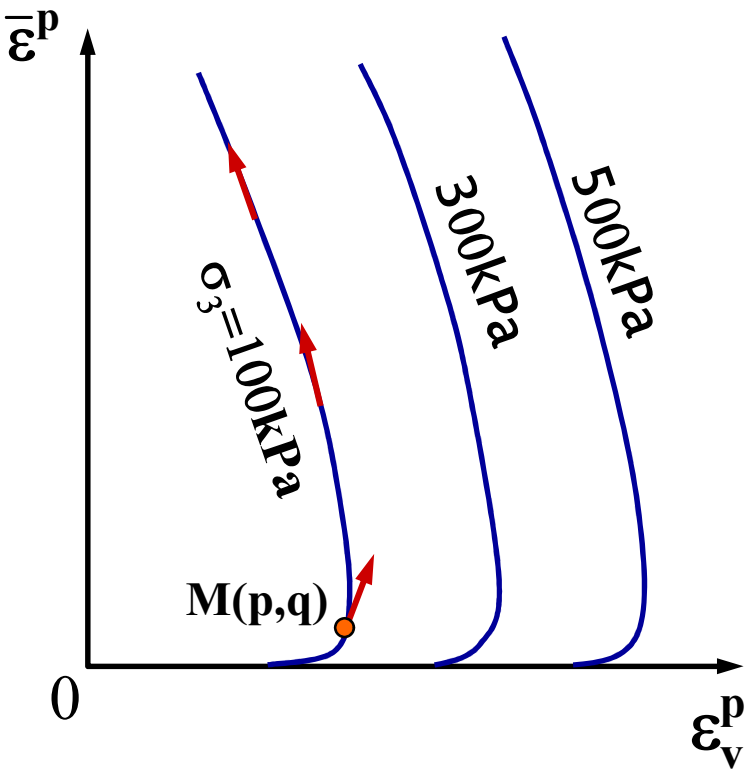
$$\bar{\varepsilon}^p = \bar{\varepsilon} - \bar{\varepsilon}^e$$

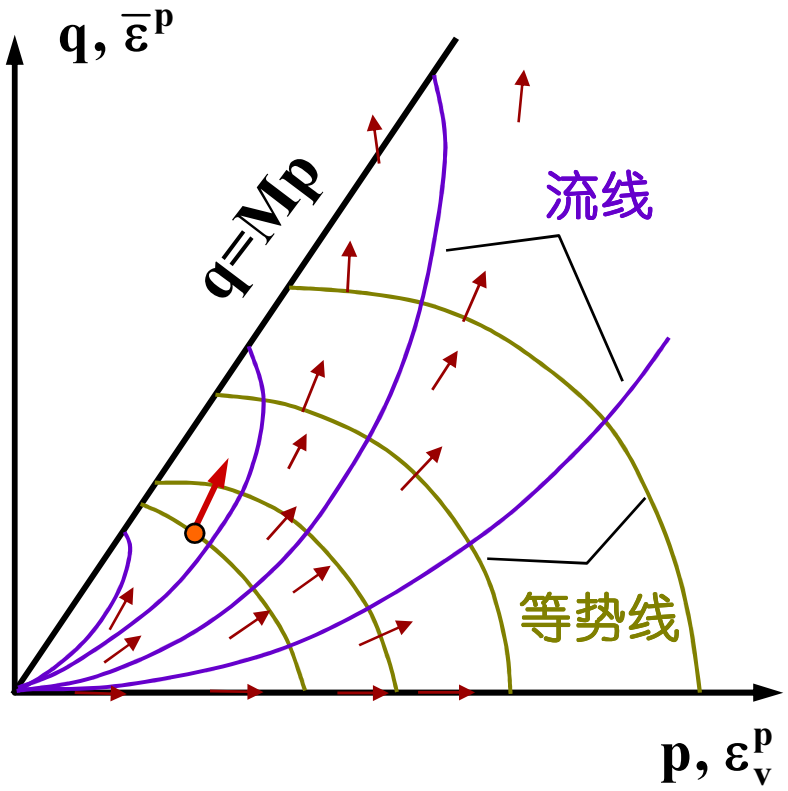
- ☞ 计算三轴试验下各应力状态下的塑性应变
- ☞ 绘制应力－塑性应变间关系曲线
- ☞ 在应力坐标下画出塑性应变增量的方向

清华弹塑性模型

P102

■ 塑性应变增量方向与塑性势面



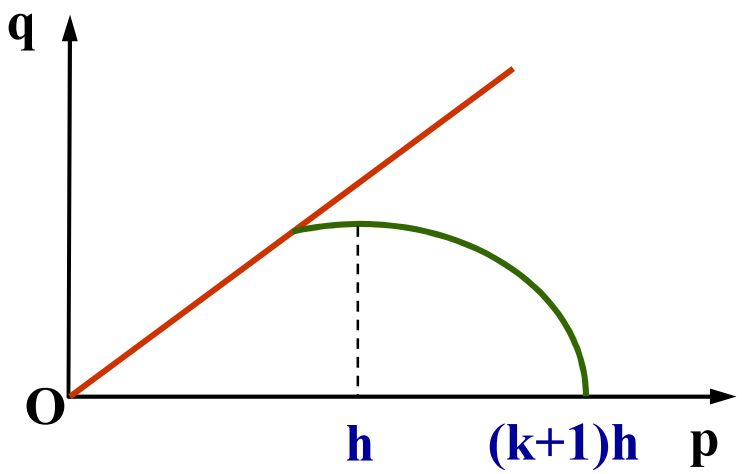


清华弹塑性模型

P103

■ 椭圆屈服面

$$f = g = \left(\frac{p-h}{kh}\right)^2 + \left(\frac{q}{krh}\right)^2 - 1 = 0$$



☞ 硬化参数h

$$h = \frac{\sqrt{k^2p^2 + \frac{k^2-1}{r^2}q^2} - p}{k^2-1}$$

清华弹塑性模型

P103

■ 参数k、r的确定

- 屈服面方程 $$f = g = \left(\frac{p-h}{kh}\right)^2 + \left(\frac{q}{krh}\right)^2 - 1 = 0$$

- 硬化参数h $$h = \frac{\sqrt{k^2p^2 + \frac{k^2-1}{r^2}q^2} - p}{k^2-1}$$

☞ 由正交法则得

$$-\frac{d\varepsilon_v^{\ p}}{d\bar{\varepsilon}^p} = \frac{dq}{dp} = -r^2x + \frac{r^2}{k^2-1}\left[-x + \sqrt{x^2k^2 + \frac{k^2-1}{r^2}}\right]$$

其中， $x = p/q = 1/\eta$

清华弹塑性模型

P103

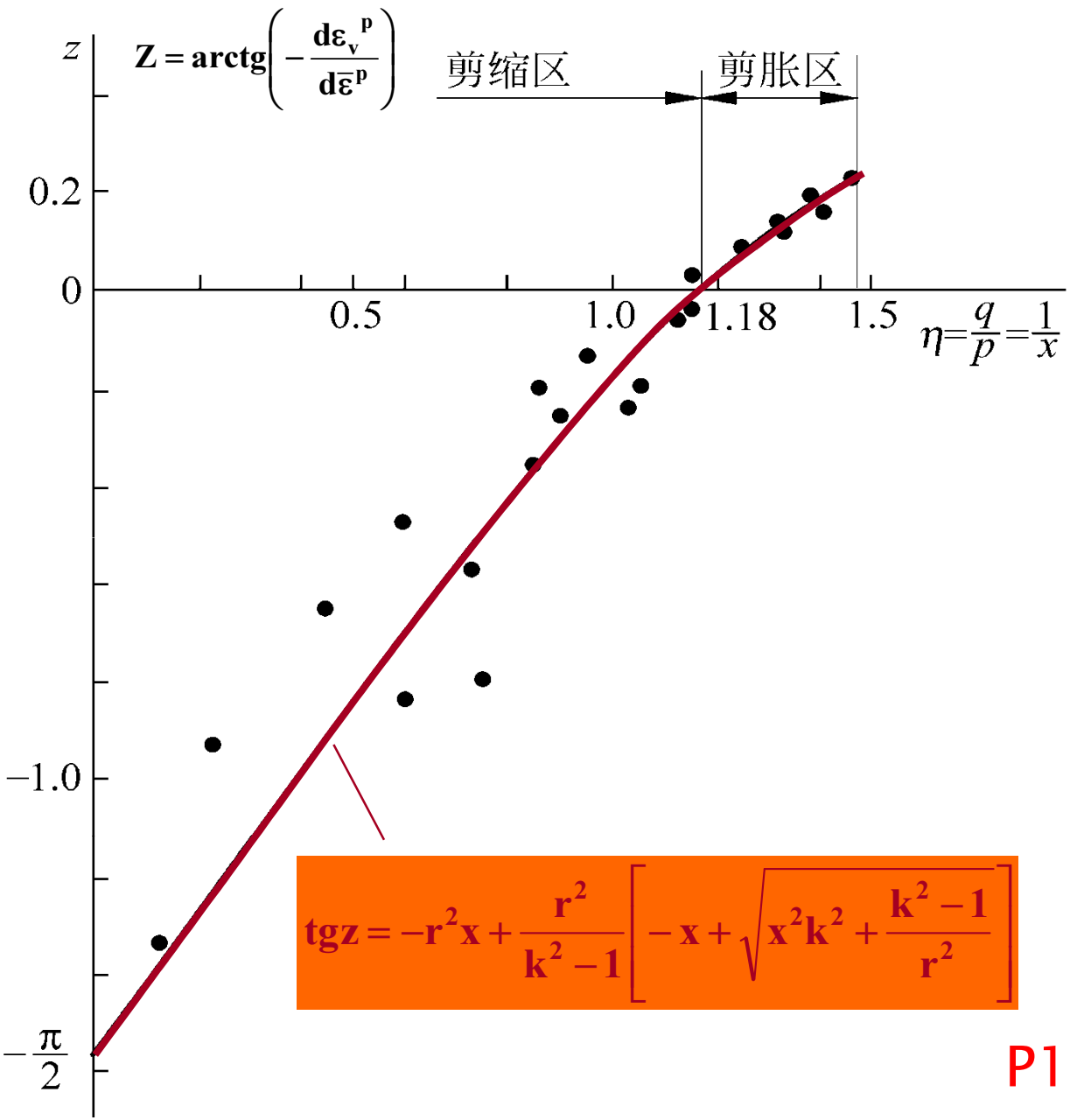
令：　$$Z = \mathrm{arctg}\left(-\frac{d\varepsilon_v^{\ p}}{d\bar{\varepsilon}^p}\right)$$

$$\mathrm{tg}z = -r^2x + \frac{r^2}{k^2-1}\left[-x + \sqrt{x^2k^2 + \frac{k^2-1}{r^2}}\right]$$

☞ 将所有试验点都点绘在座标系中，然后用上式去拟合试验点，从而确定试验常数r、k

清华弹塑性模型

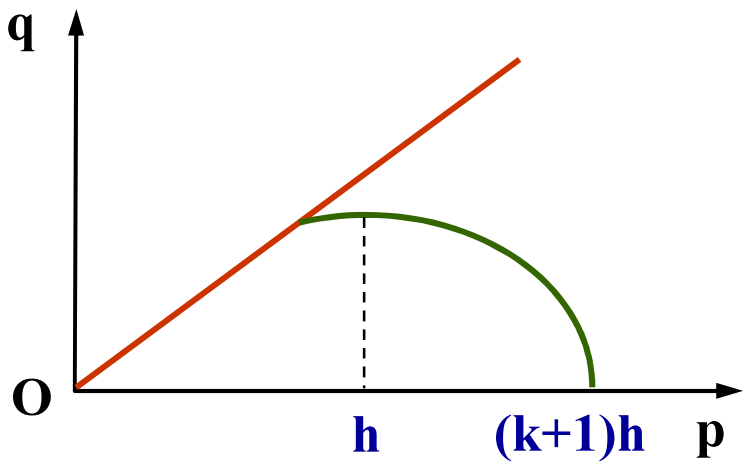
P103



$$\mathrm{tg}z = -r^2x + \frac{r^2}{k^2-1}\left[-x+\sqrt{x^2k^2+\frac{k^2-1}{r^2}}\right]$$

P104

■ 硬化参数h的确定



$$f = g = \left(\frac{p-h}{kh}\right)^2 + \left(\frac{q}{krh}\right)^2 - 1 = 0$$

$$h = \frac{p_0}{1+k}$$

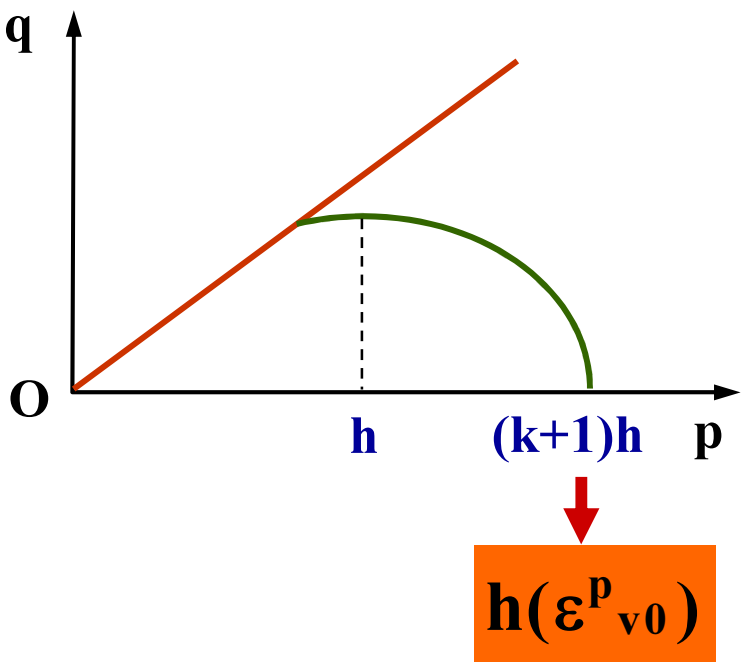
☞ 在同一屈服面上：$p_0 = \left[\sqrt{k^2p^2 + \frac{k^2-1}{r^2}q^2} - p\right] \Big/ (k-1)$

清华弹塑性模型

P104

☞ 从各向等压试验：

$$p_0 = p_a \frac{1}{m_4}(\varepsilon_{v0}^p + m_6)^{m_5}$$



$$h = \frac{p_0}{1+k}$$

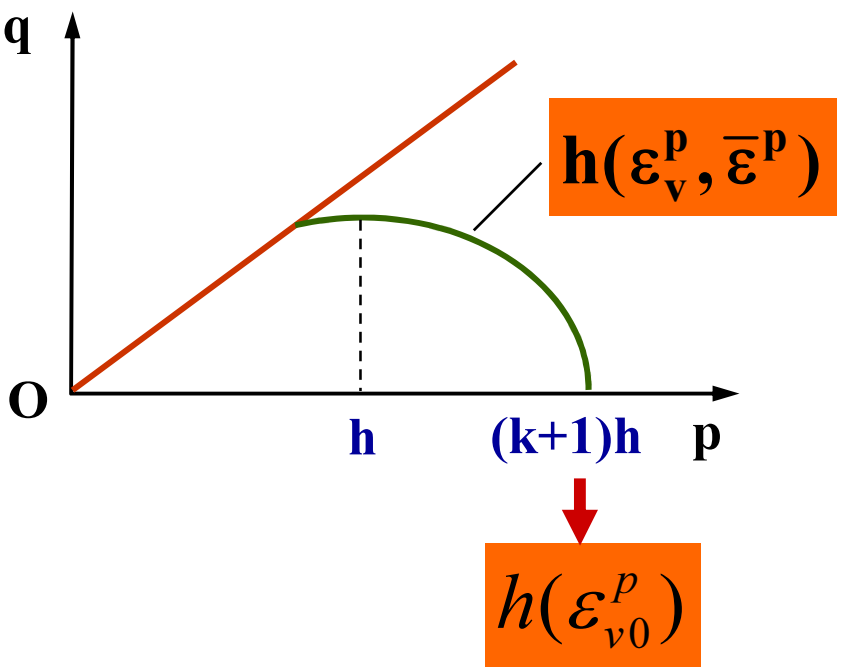
$$h = \frac{p_a}{1+k} \cdot \frac{1}{m_4}(\varepsilon_{v0}^p + m_6)^{m_5}$$

清华弹塑性模型

P104

☞ 在同一个屈服面上：

$$\varepsilon_{v0}^{p} = f(\varepsilon_{v}^{p}, \bar{\varepsilon}^{p})$$



$$\varepsilon_{v0}^{p} = \varepsilon_{v}^{p} + m_3 \bar{\varepsilon}^{p})$$

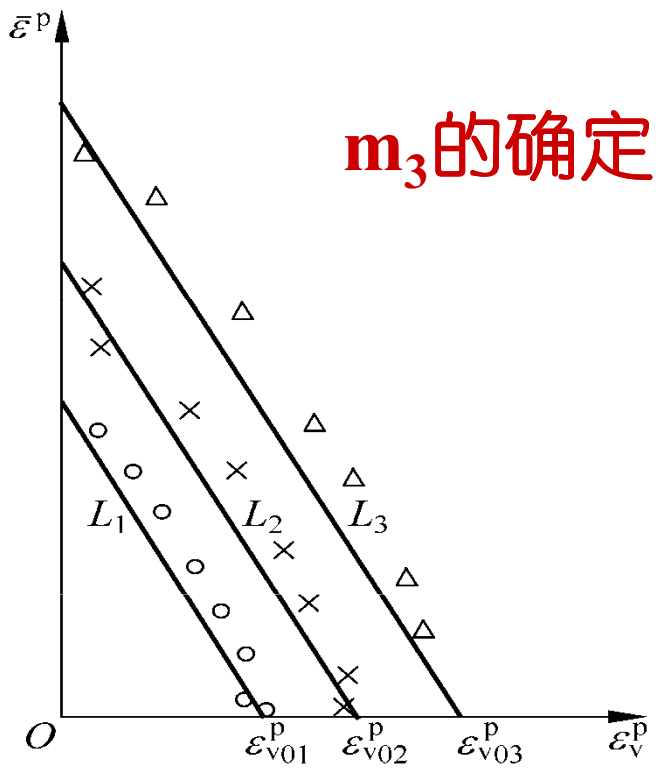
$$\in_1 = 1 + m_3 \in_2$$

其中，

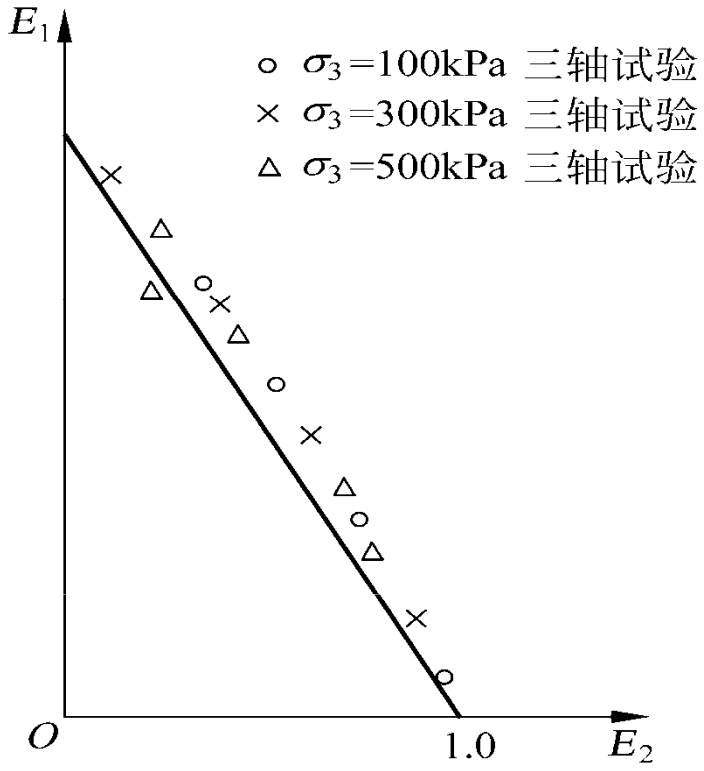
$$\in_1 = \frac{\varepsilon_v^p}{\varepsilon_{v0}^p}, \quad \in_1 = \frac{\bar{\varepsilon}^p}{\varepsilon_{v0}^p}$$

清华弹塑性模型

P104



m_3的确定



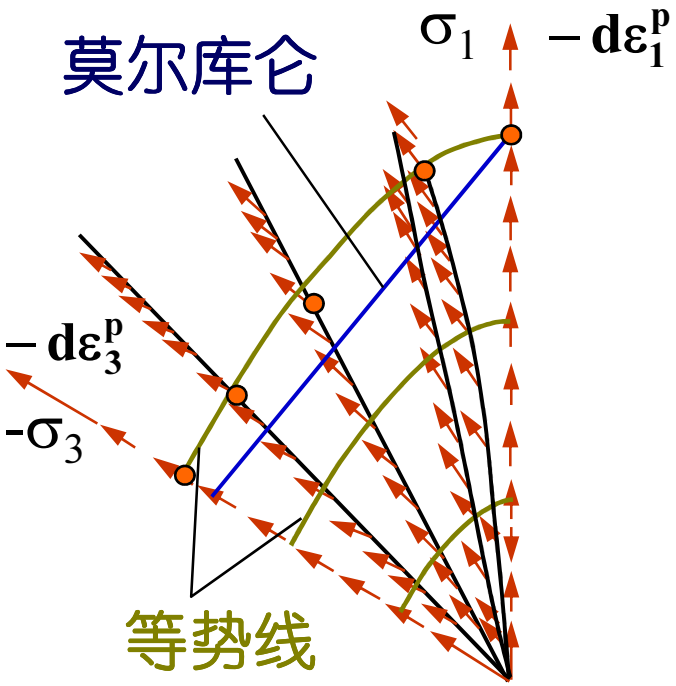
☞ 硬化参数的表达式：

$$h = \frac{p_a}{1+k} \cdot \frac{1}{m_4}\left[m_6 + \varepsilon_v^p + m_3\bar{\varepsilon}^p\right]^{m_5}$$

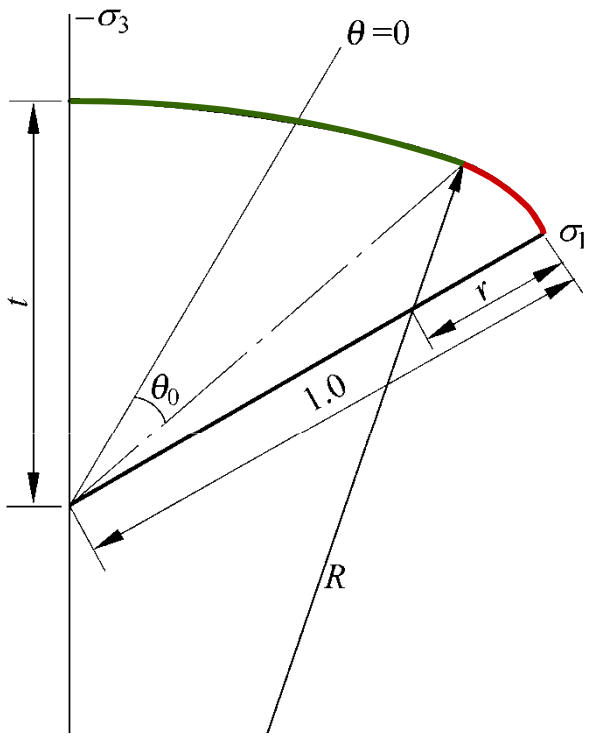
清华弹塑性模型

P105

■ π平面上的屈服轨迹



承德中密砂试验



双圆弧屈服轨迹

清华弹塑性模型

P105

■ 三维应力空间的本构模型

- 屈服面 $$f=\left(\frac{p-h}{kh}\right)^2+\left(\frac{q}{\alpha(\theta)krh}\right)^2-1=0$$

- 破坏方程 $$\frac{q}{p}=M_c\alpha(\theta)$$

$\alpha(\theta)$ - 形状参数，它表示了平面上屈服轨迹的形状（双圆弧）。试验表明它也表示了破坏面在π平面上轨迹的形状

M_c - 常规三轴压缩试验得到的破坏应力比

清华弹塑性模型

P105

$$\{\Delta\varepsilon^p\} = \Delta\lambda\{n\} = \Delta\lambda\frac{1}{N}\left(\frac{\partial g}{\partial\sigma}\right)$$

$\Delta\lambda$ - 塑性应变增量的大小

$\{n\}$ - 代表其方向

N -法向矢量的模

$$\Delta\lambda = a\left(\frac{\partial g}{\partial\sigma}\right)^T\{\Delta\sigma\}$$

a - 塑性系数，屈服面变化一个单位对应的塑性应变增量

$$\{\Delta\varepsilon^p\} = a\frac{1}{N}\left(\frac{\partial g}{\partial\sigma}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial\sigma}\right)^T\{\Delta\sigma\}$$

或： $$\{\Delta\varepsilon^p\} = A\left(\frac{\partial g}{\partial\sigma}\right)\Delta g$$

A=a/N

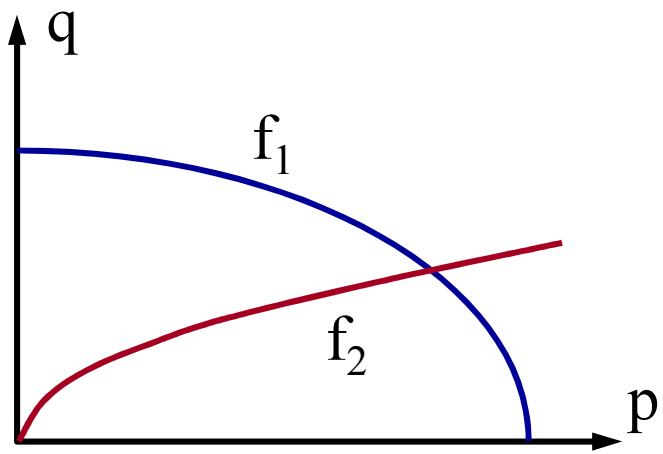
沈珠江双屈服面模型

DEL

- 采用体积和剪切两个屈服面来描述土体的屈服特性：

$$f_1 = p^2 + r^2 q^2$$

$$f_2 = q^s / p$$



- 采用正交流动规则：

$$\{\Delta\varepsilon\} = \{\Delta\varepsilon^e\} + \{\Delta\varepsilon^p\}$$

$$\{\Delta\varepsilon\} = [D]_e^{-1}\{\Delta\sigma\} + A_1\left\{\frac{\partial f_1}{\partial\sigma}\right\}\Delta f_1 + A_2\left\{\frac{\partial f_2}{\partial\sigma}\right\}\Delta f_2$$

沈珠江双屈服面模型

DEL

- A_1、A_2的确定：假定为应力状态的函数，与应力路径无关，因此可通过室内简单应力路径确定

☞ 常规三轴试验，设： $E_t = \dfrac{\Delta\varepsilon_1}{\Delta\sigma_1}$，$\mu_t = \dfrac{\Delta\varepsilon_v}{\Delta\varepsilon_1}$

$$A_1 = \frac{1}{4p^2}\frac{\eta\left(\dfrac{9}{E_t} - \dfrac{3\mu_t}{E_t} - \dfrac{3}{G_e}\right) + 3s\left(\dfrac{3\mu_t}{E_t} - \dfrac{1}{B_e}\right)}{3(1+3\eta r^2)(s+\eta^2 r^2)}$$

$$A_2 = \frac{p^2 q^2}{q^{2s}}\frac{\left(\dfrac{9}{E_t} - \dfrac{3\mu_t}{E_t} - \dfrac{3}{G_e}\right) - 3r^2\eta\left(\dfrac{3\mu_t}{E_t} - \dfrac{1}{B_e}\right)}{3(3s-\eta)(s+\eta^2 r^2)}$$

沈珠江双屈服面模型

DEL

■ E_t、μ_t的确定：

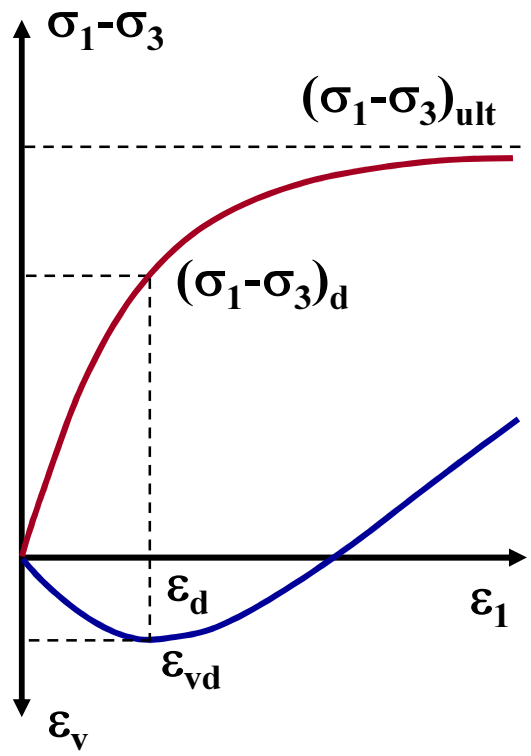
☞ 假定σ_1-σ_3与ε_1关系采用邓肯-张模型的双曲线关系

$$E_t = k \cdot Pa \cdot \left(\frac{\sigma_3}{Pa}\right)^n \cdot \left[1 - R_f \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{(\sigma_1 - \sigma_3)_f}\right]^2$$

☞ 假定ε_v与ε_1关系采用抛物线描述

$$\mu_t = 2c_d \left(\frac{\sigma_3}{p_a}\right)^{n_d} \frac{E_i R_f}{(\sigma_1 - \sigma_3)_f} \frac{1 - R_d}{R_d} \left(1 - \frac{R_f S_l}{1 - R_f S_l} \frac{1 - R_d}{R_d}\right)$$

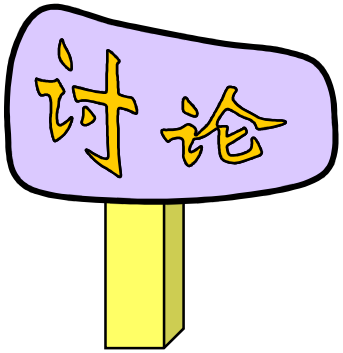
$$R_d = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)_d}{(\sigma_1 - \sigma_3)_{ult}}$$



模型参数：c，ϕ，k，n，R_f
c_d，n_d，R_d，E_{ur}

沈珠江双屈服面模型

DEL



☞ 国内土石坝工程中常用的三个堆石体模型：

- 邓肯张EB模型
- 清华非线性解耦KG模型
- 沈珠江双屈服面模型

模型对比与评述

第二章 土的本构关系

2.1 概述 √

2.2 应力和应变 √

2.3 土的应力变形特性 √

2.4 土的弹性模型 √

2.5 土的弹塑性模型的一般原理 √

2.6 剑桥模型(Cam—Clay) √

2.7 其它典型弹塑性模型 √

2.8 土的损伤模型

2.9 土的广义位势理论

P106

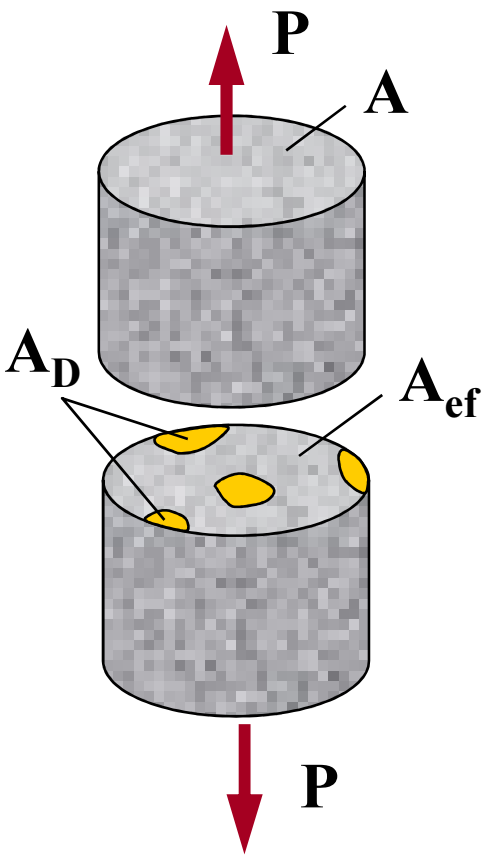
- 连续损伤力学是由卡克诺夫（Kachnov）1958年在研究一维蠕变断裂问题时提出的，他引入连续性因子和有效应力的概念来表示材料损伤后的应力应变关系
- 以后损伤力学（damage mechanics）被推广应用来模拟金属的疲劳，蠕变及延展塑性变形的损伤，也被用于岩石和砼等脆性材料
- 近年来也被广泛应用于土力学中

损伤理论 – 概述

P106

$$A = A_{ef} + A_D$$

- 总截面积A
- 实际受力A_{ef}
- 损伤面积A_D



$$1 = \frac{A_D}{A} + \frac{A_{ef}}{A} = D + \psi$$

$$D = \frac{A_D}{A}$$

损伤因子
（损伤变量）

$$\psi = \frac{A_{ef}}{A}$$

连续因子

损伤因子和连续因子

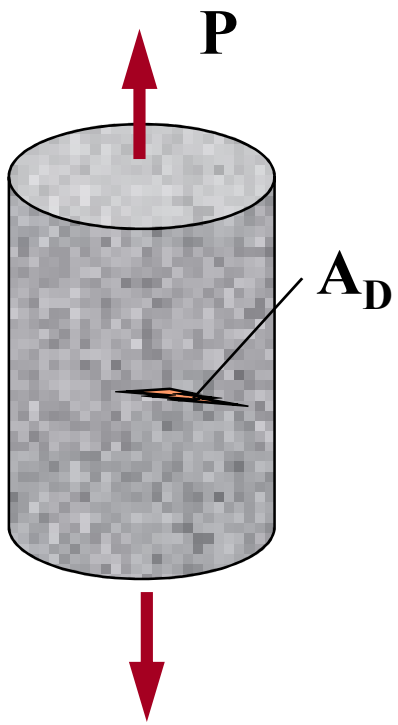
P106

$$P = \sigma A = \sigma_D A_D + \sigma_{ef} A_{ef}$$

如果，$\sigma_D=0$

$$\sigma_{ef} = \frac{p}{A_{ef}} = \frac{p}{\Psi A} = \frac{\sigma}{\psi} = \frac{\sigma}{1-D}$$

$$\sigma = (1-D)\sigma_{ef}$$



损伤因子和连续因子

P106

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{\sigma_{ef}}{E_0} = \frac{\sigma}{E_0(1-D)} = \frac{\sigma}{E_0\psi}$$

如果确定了D(σ, ε)或ψ（σ, ε）

则建立了一个最简单的损伤模型

一维弹性损伤的应力应变关系

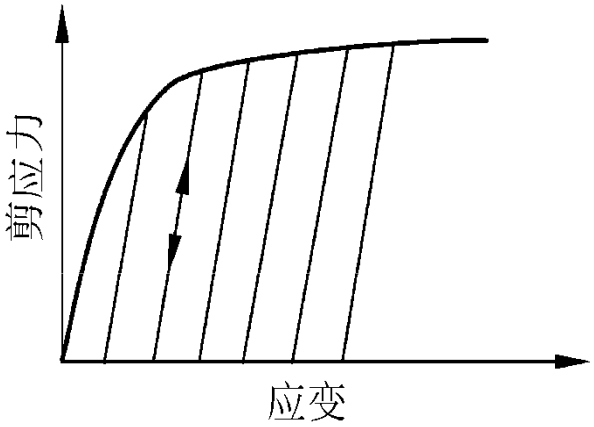
P106

- 选择或确定一个或一组合适的损伤变量D
- 确定有效应力与损伤变量间关系，即考虑损伤变量的本构关系
- 确定损伤变量的函数表达式$D=F(\sigma,\varepsilon)$

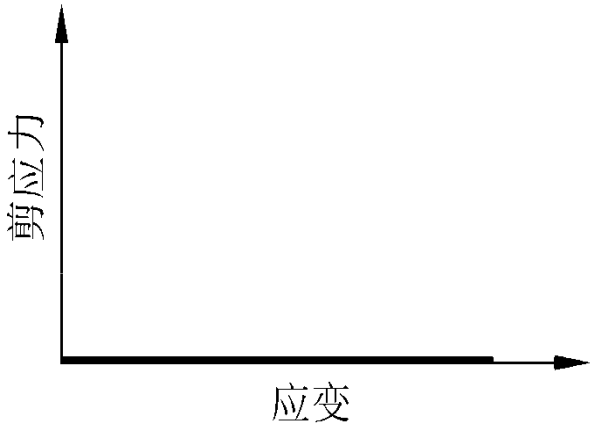
损伤模型的建立

P106

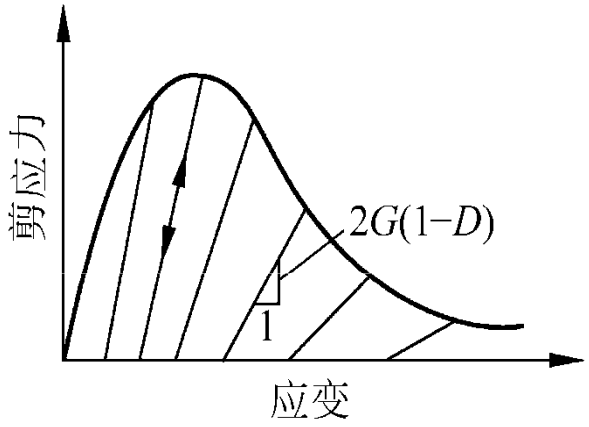
- D=0时表示材料无损伤或初始状态
- D=1.0表示材料达到完全损伤状态



初始材料的弹塑性应力应变关系

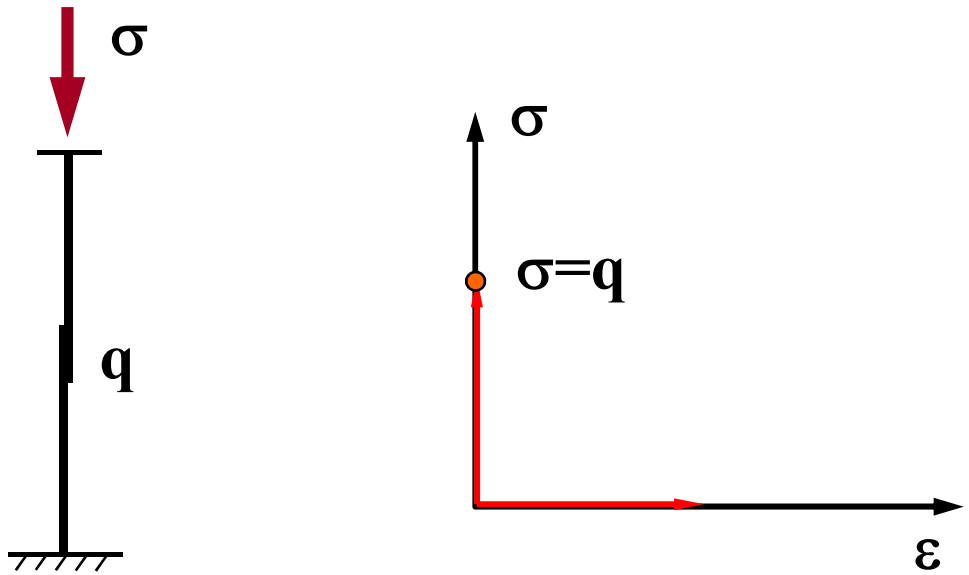


完全损伤材料应力应变关系



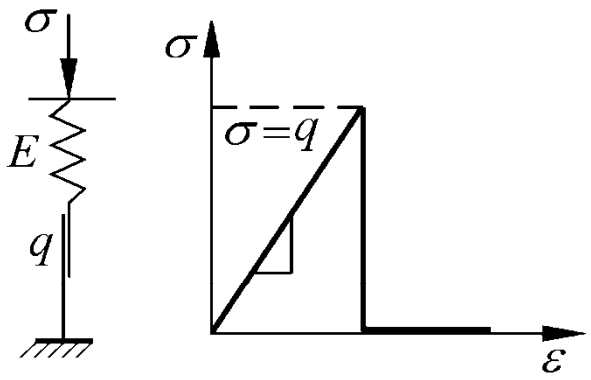
部分损伤材料应力应变关系

弹塑性材料损伤变形特性

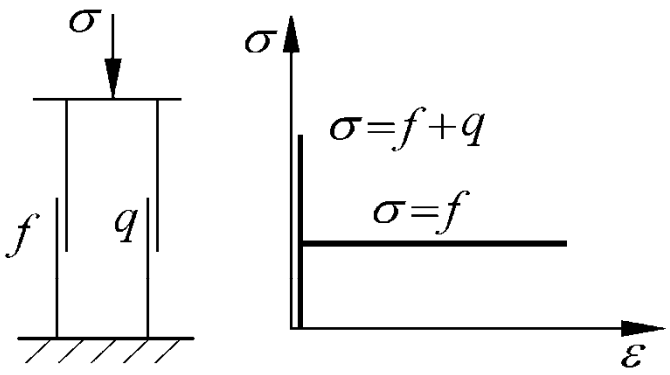


$$\begin{cases} \sigma < q; & \varepsilon = 0 \\ \sigma = 0; & \varepsilon > 0 \end{cases}$$

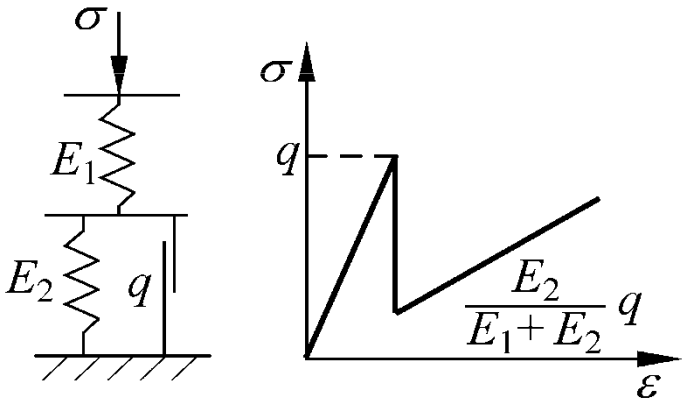
沈珠江脆性胶结杆物理模型



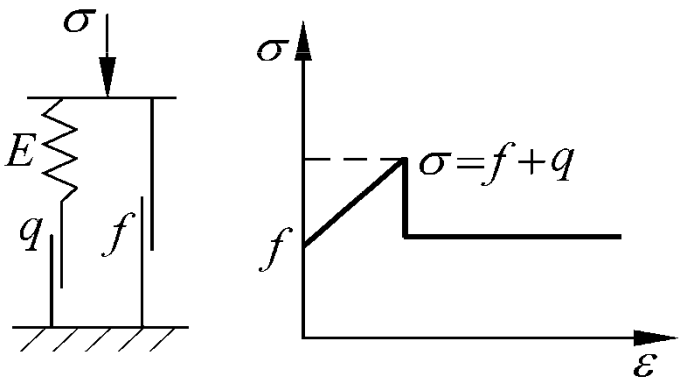
弹性完全损伤模型



塑性损伤模型



弹性损伤模型



弹塑性损伤模型

由胶结杆模型组成的损伤模型

P115

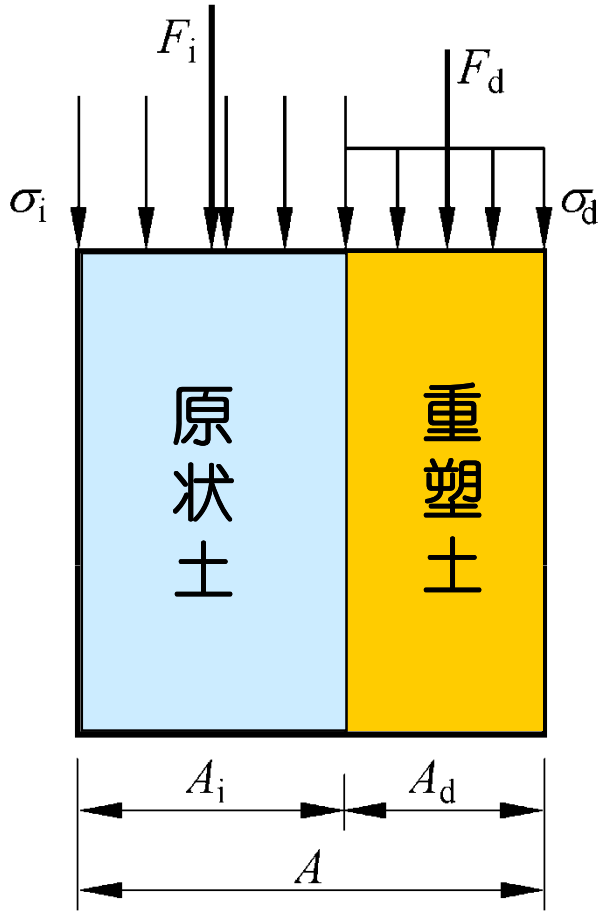
- 损伤及其应变是不可恢复的：不可逆热力学理论
- 原状土的初始状态：初始无损伤材料
- 完全破坏（重塑）土体：损伤后的材料
- 加载、扰动过程中土体：原状土与损伤土的复合体
- 把损伤部分所占的比例w称为损伤比，实际土体力学特性可表示为二者的加权平均值

$$S = (1 - w)S_i + wS_d$$

S为土的某种力学指标

原状土指标　重塑土指标

土的损伤模型—原理



$$F_d = \sigma_d A_d$$

$$F_i = \sigma_i A_i$$

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{F_i}{A} + \frac{F_d}{A}$$

$$= \frac{F_i}{A_i} \cdot \frac{A_i}{A} + \frac{F_d}{A_d} \cdot \frac{A_d}{A}$$

$$= (1 - w)\sigma_i + w\sigma_d$$

单向压缩土体的损伤

$$\{\sigma\}=(1-w)\{\sigma_i\}+w\{\sigma_d\}$$

$$\sigma_{ij}=(1-w)\sigma_{ij}^{i}+w\sigma_{ij}^{d}$$

☞ 增量形式

$$\{\Delta\sigma\}=(1-w)\{\Delta\sigma_i\}+w\{\Delta\sigma_d\}-[\{\sigma_i\}-\{\sigma_d\}]\Delta w$$

☞ 应力应变关系

$$\{\Delta\sigma\}=(1-w)[D_i]\{\Delta\varepsilon\}+w[D_d]\{\Delta\varepsilon\}-[\{\sigma_i\}-\{\sigma_d\}]\left\{\frac{\partial W}{\partial\varepsilon}\right\}^{T}\{\Delta\varepsilon\}$$

$[D_i]$与$[D_d]$分别为原状土与重塑土的切线刚度矩阵

土体损伤模型

☞ 如果w 是应变的函数：

$$\{\Delta\sigma\} = [D]_d \{\Delta\varepsilon\}$$

$[D]_d$ – 切线损伤模量矩阵

$$[D]_d = (1-w)[D_i] + w[D_d] - [\{\sigma_i\} - \{\sigma_d\}]\left\{\frac{\partial W}{\partial \varepsilon}\right\}^T$$

土体损伤模型

- 没有了强度，如某些损伤模型所假设
- 无抗剪强度，但可承受静水压力，如受限制的液体
- 达到临界状态，在一定p，q 作用下，表现一定抗剪强度，处于临界状态，发生剪变，但不再发生体应变，如一般岩土材料

土体损伤后的状态

- 对于一般原状土，主要是由于颗粒间移动造成胶结与原组织的破坏，损伤表现为塑性应变的函数
- 而对于冻土，则温度、压力均可引起结冻土的融解，宏观上表现出损伤性质。例如围压大到一定水平，冻土的强度包线随围压增加而下降
- 湿陷性黄土损伤主要是由土中含水量增加引起的
- 另外反复加载引起的疲劳、蠕变、腐蚀，其损伤主要是时间的函数
- 多种动因及来源于土的多种微观结构的变化

引起土体损伤的因素

- 选择或确定一个或一组合适的损伤变量D
- 确定有效应力与损伤变量间关系，即考虑损伤变量的本构关系
- 确定损伤变量的函数表达式$D=F(\sigma,\varepsilon)$
- 损伤变量具有明确的物理意义，D=0时表示材料初始状态；D=1.0表示材料达到完全损伤状态
- 根据材料受力变形和强度的微观机理定义损伤变量，是建立合理有效的损伤模型的关键

损伤模型的建立

第二章 土的本构关系

2.1 概述 √

2.2 应力和应变 √

2.3 土的应力变形特性 √

2.4 土的弹性模型 √

2.5 土的弹塑性模型的一般原理 √

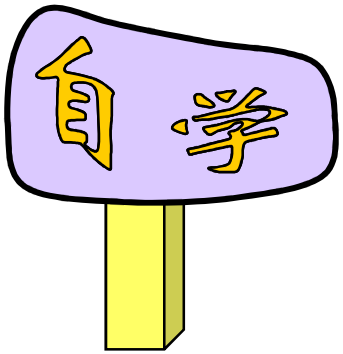
2.6 剑桥模型(Cam—Clay) √

2.7 其它典型弹塑性模型 √

2.8 土的损伤模型 √

2.9 土的广义位势理论

P120



☞ 土的广义位势理论

Ref: 李广信 高等土力学 第二版 清华大学出版社 2016

该PPT基本源于网络 请尊重原著者的版权！

The end

文件名格式：班级 学号 姓名 简略实验名称

邮件标题同文件名

Any questions please 发送至

xingzhengwu@163.com