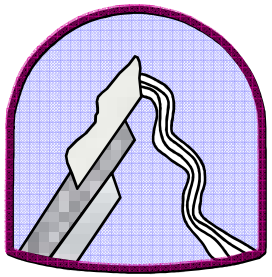
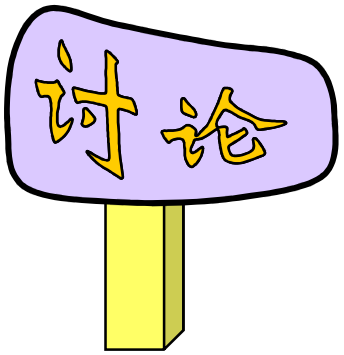
《高等土力学》之四

土中水及渗流计算



渗流及其特点



水力学

- 不可压缩粘滞性流体 ➡ Navier-Stokes 方程
- 对无粘性的理想流体 ➡ Euler 方程

☞ 渗流为水的流动问题，为什么需要进行专门的研究？

☞ 渗流有些什么特征？

第四章 土中水及渗流计算

4.1 导言

4.2 土中水的形态及其对土性的影响

4.3 土的渗透性

4.4 二维渗流与流网

4.5 饱和土渗流数值计算的有限元方法

4.6 有关渗流的一些工程问题

- ☞4.1.1 岩土中的水及其运动
- ☞4.1.2 渗流的工程应用
- ☞4.1.3 土中水和渗流问题的研究历史

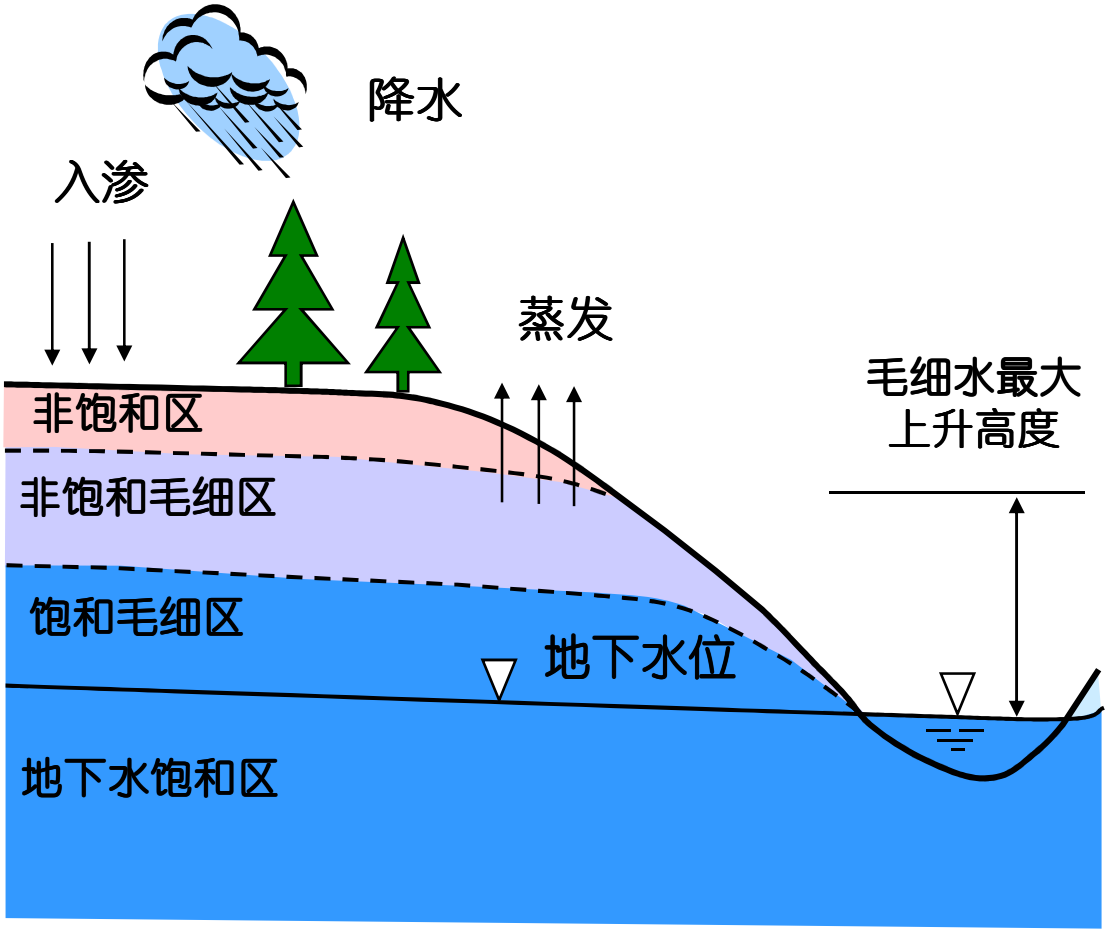
导　言

P213 4.1.1

☞地面：地下水输入和输出的界面

☞非饱和带（包气带）：浅层非饱和区，

- 位于地下水位和毛细区以上
- 水饱和度<1
- 水相压力<大气压
- 渗透系数与含水量相关



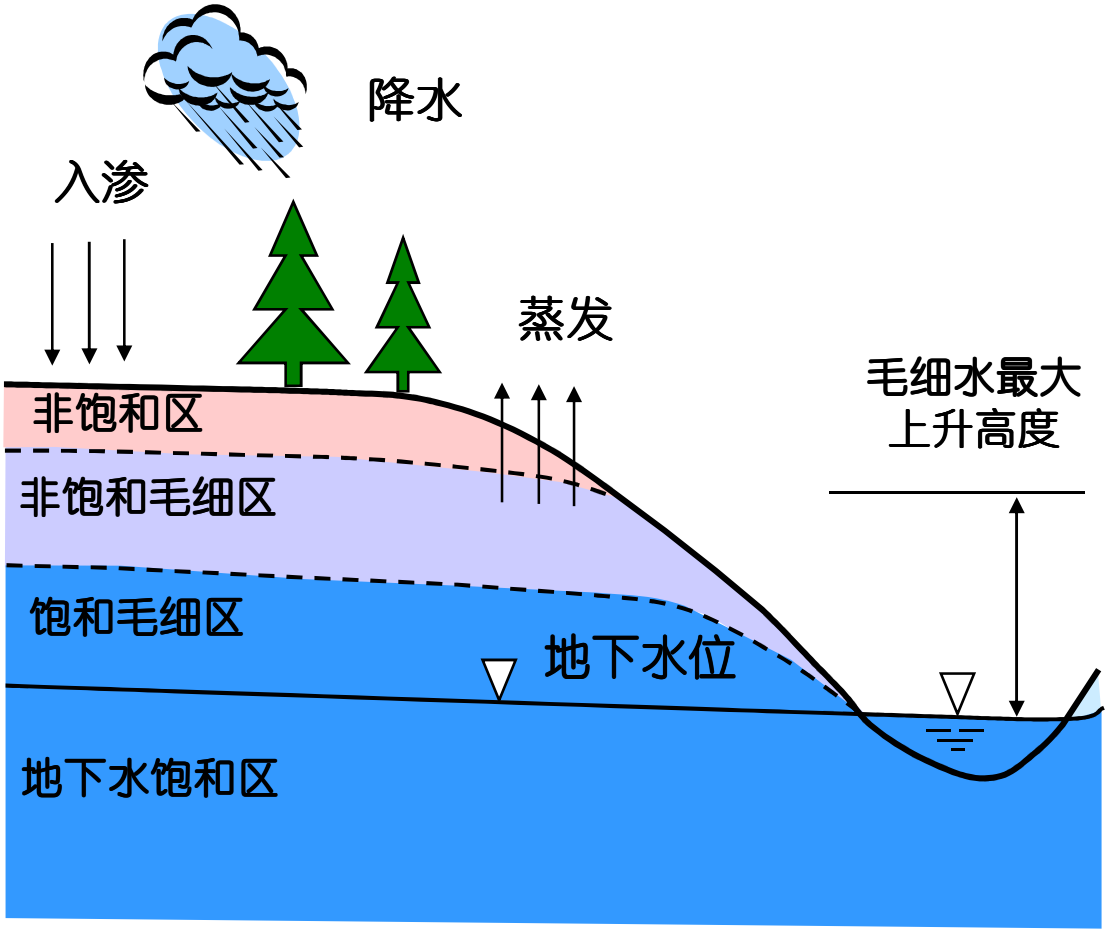
岩土中的水及其运动

P213 4.1.1

☞地下水位：
孔隙水压力=大气压

☞地下水饱和区：

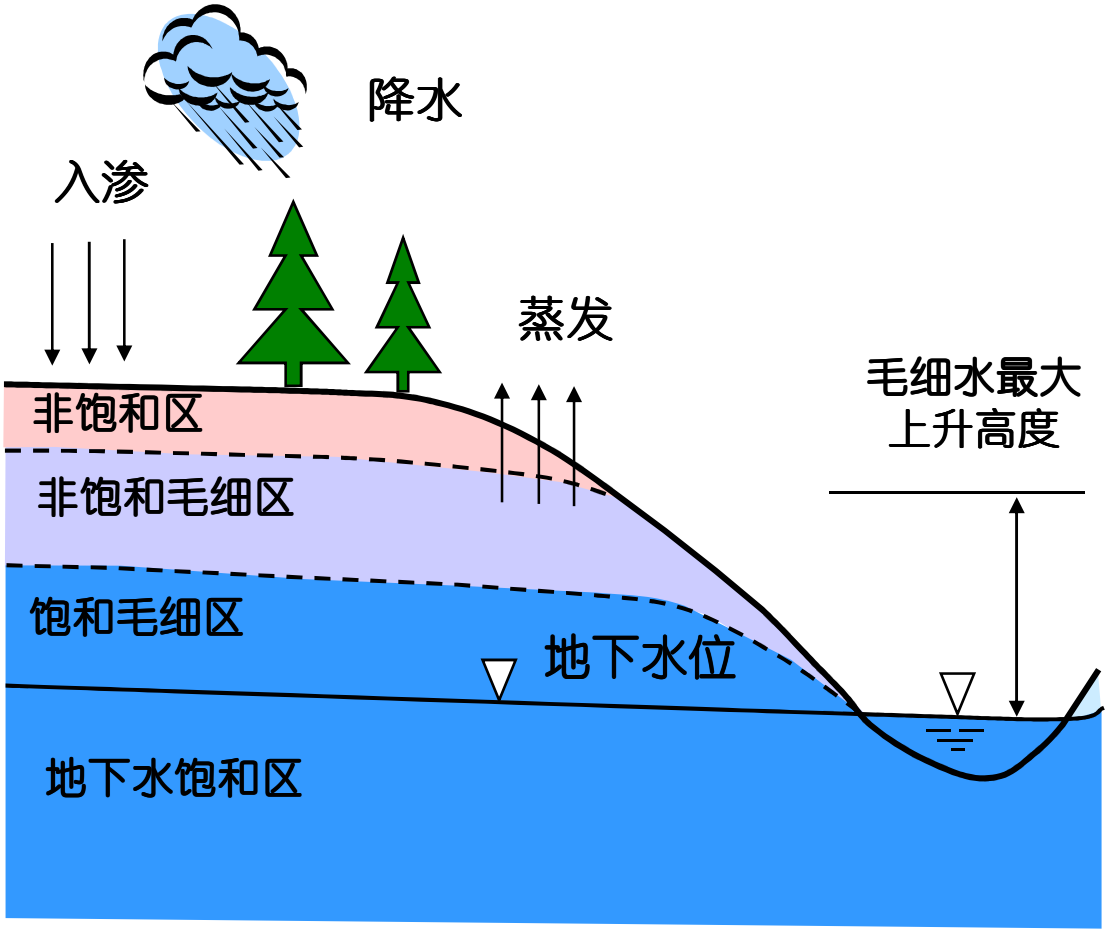
- 位于地下水位以下
- 水饱和度=1
- 水相压力>大气压，随深度增加
- 同一种土渗透系数为常数



岩土中的水及其运动

☞毛细带：
地下水位以上一定范围，饱和、非饱和

- 上升高度取决于土体的孔隙特性
- 随上升高度增加，饱和度减少
- 水相压力<大气压，随高度减小
- 性质复杂



岩土中的水及其运动

- 地球生命的源泉
- 渗漏：渠系中水的利用系数平均不足0.5
- 渗透破坏：土石坝破坏有39%由渗透所导致
  堤防60-70%由于“管涌”等渗透变形引起
- 深基坑中渗透影响水土压力及支护结构的内力
- 采油工业
- 地下水污染 ：废水、固体垃圾、放射性废料…
- 生物力学

渗流的工程应用

P214 4.1.2

98洪水中的险情和溃口

- 长江出险：6100多处；
  松花江与嫩江：9500多处；60－70%为管涌
- 历史上长江干堤决口的90%由于堤基管涌所导致
- 98·8·7：九江城防管涌决口，形成61米宽溃口
- 98·8·4：江西江新洲管涌引起溃口，淹没区4.1万人，78km²

1993美国密西西比管涌

江西省江新洲洲头
北侧堤坝崩岸原貌

治理管涌

长江的塌岸

- 建于1989年
  - 高71米
    长265米
- 1993年8月27
  日垮坝
- 死300余人

渗透破坏:青海沟后水库溃口

- 1856年法国工程师达西（Darcy）提出达西定律
- 1889年俄国的茹可夫斯基推导了渗流的微分方程
- 1901年劳（Low）给出了粘土颗粒表面结合水形成的机理
- 1910年理查森首先提出了有限差分法
- 1922年巴甫洛夫斯基提出了求解渗流场的电模拟法
- 20世纪60年代之后，计算渗流力学发展。非饱和土、固结与变形耦合计算、与极限分析耦合、混合流、污染物扩散····

土中水和渗流问题的研究历史

P214 4.1.3

- ☞ 4.2.1 土与水间的物理化学作用、黏土颗粒表面的双电层
- ☞ 4.2.2 毛细水与土中吸力
- ☞ 4.2.3 土的冻胀和冻融作用

土中水的形态及其对土性的影响

P215 4.2

☞4.2.1 土与水间的物理化学作用、黏土颗粒表面的双电层

1 水分子结构及其相互作用

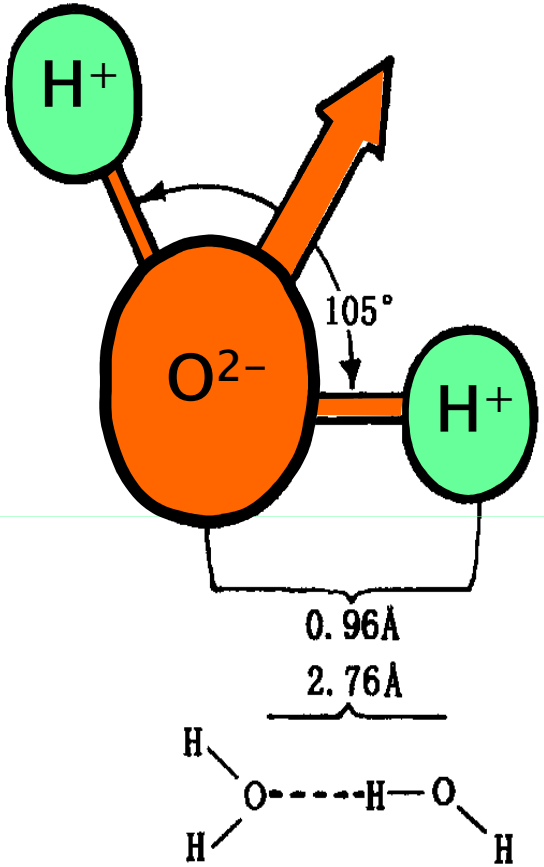
2 粘土颗粒表面的电荷

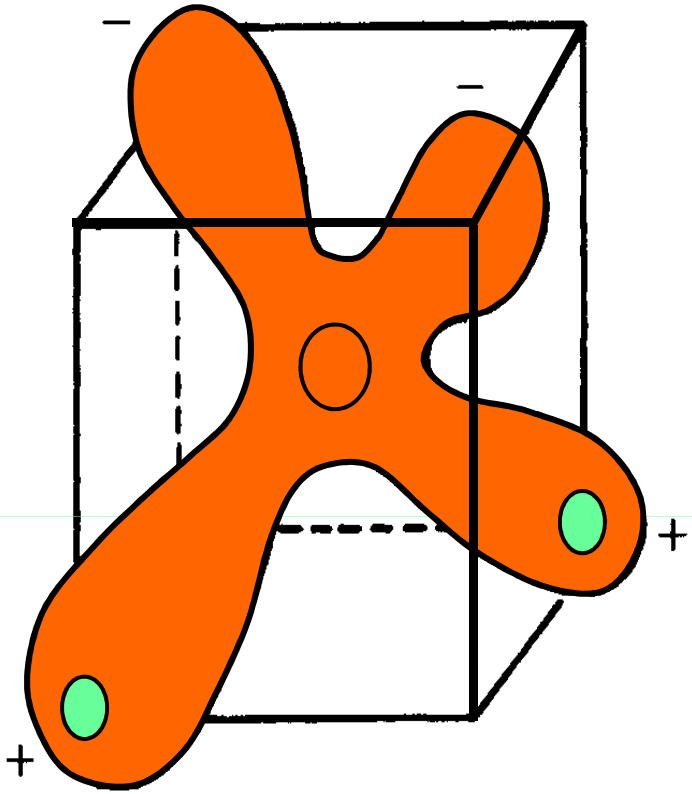
3 粘土颗粒表面的双电层与结合水

4 粘土颗粒双电层的厚度

5 几点结论

P215





水分子的结构　　水分子的电子云示意图

P215 4.2.1

- 粘土颗粒表面带有负电荷，在其周围形成电场
- 周围水分子偶极子、阳离子(Na^{+}, Ca^{++}等）因静电引力而被吸附在粘土颗粒表面，离表面愈近，吸附力愈大，吸附愈紧
- 带有负电荷的粘土片状颗粒和周围的水分子、阳离子等组成的扩散层被称为扩散双电层，简称双电层。
- 扩散双电层之外的孔隙水视为自由水。而在双电层之内的水称为结合水或薄膜水，它具有许多与一般水不同的性质

粘土颗粒表面的双电层

P215 4.2.1

- 粘土表面形成强结合水，厚度约10Å（三个水分子层），强结合水比重>1，冰点<零度，不能自由流动
- 粘土颗粒对水特性的影响，随距离的增加按指数关系衰减，影响范围约100Å，一般讲达西定律基本上也适用于高塑性粘土
- 粘性土颗粒间靠结合水连结，因而表现出塑性。粘土矿物的片状结构及矿物特性，使其具有较厚的扩散层
- 絮凝结构或分散作用取决于悬液中离子的浓度和价数，从而决定了扩散层的厚度

粘土中的结合水

P216 4.2.1 3

☞4.2.2 毛细水与土中吸力

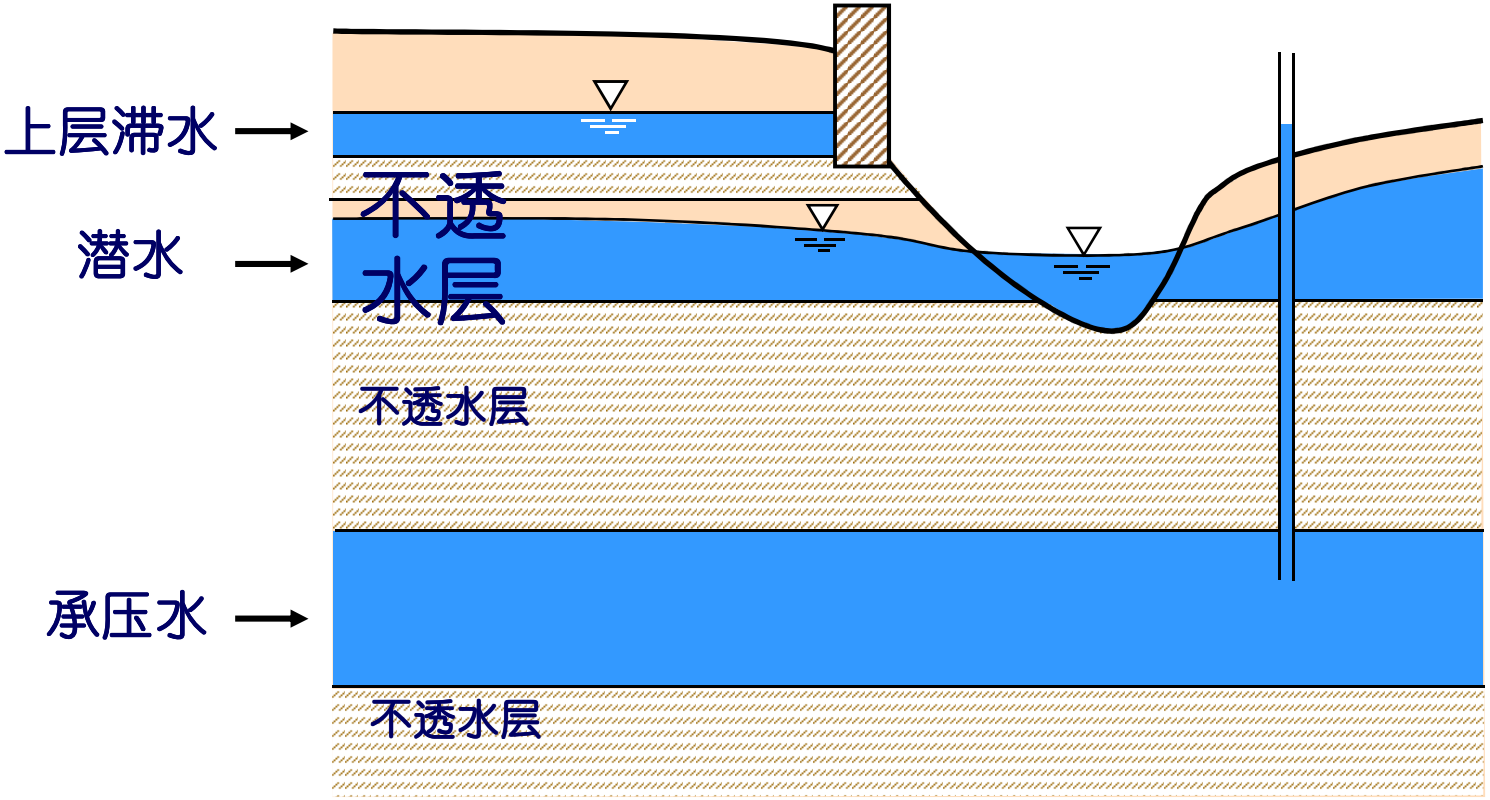
1 毛细水和毛细上升高度

2 土中吸力

3 吸力的量测与土-水特征曲线

P218

4.2 土中水的形态及其对土性的影响



三种形态的地下水

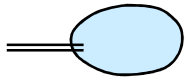
P218

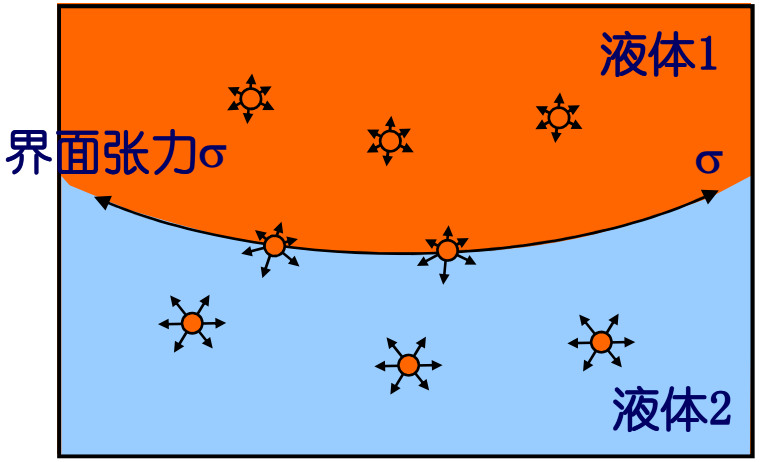
§4.1 导言

土中水 – 使大地充满生机

内压 收缩膜

> 外压

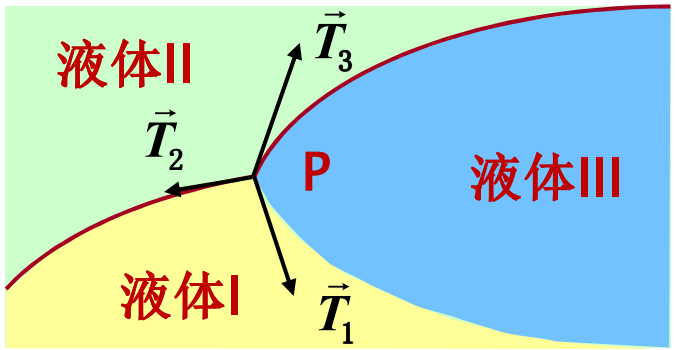




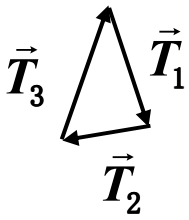
生活在水面收缩膜
顶面和底面的昆虫

界面张力

三相系统体系



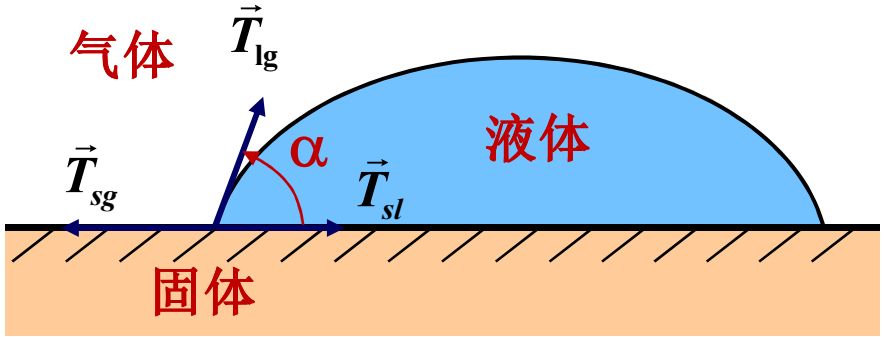
Neumann三角形



$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{T}_3 = 0$$

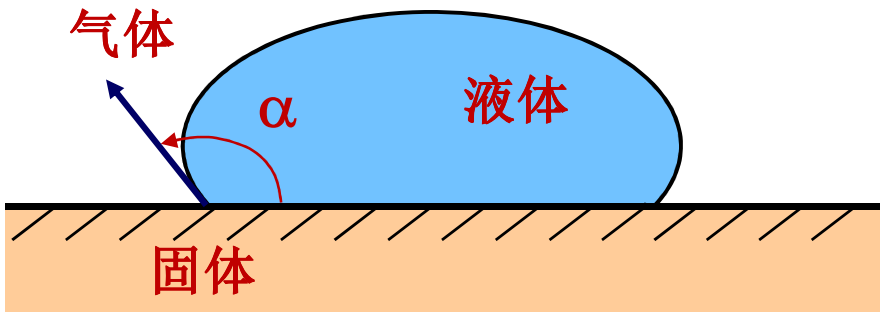
- 在三相液体系统中，作用于P点的表面张力处于平衡状态
- 满足的平衡方程称为Neumann三角定律，该方程已被测量结果证实。

三相系统的平衡方程



- 在固–液–气三相系统中，液体保持液滴形状，并存在接触角（湿润角）
- 在平行固体表面方向满足平衡方程

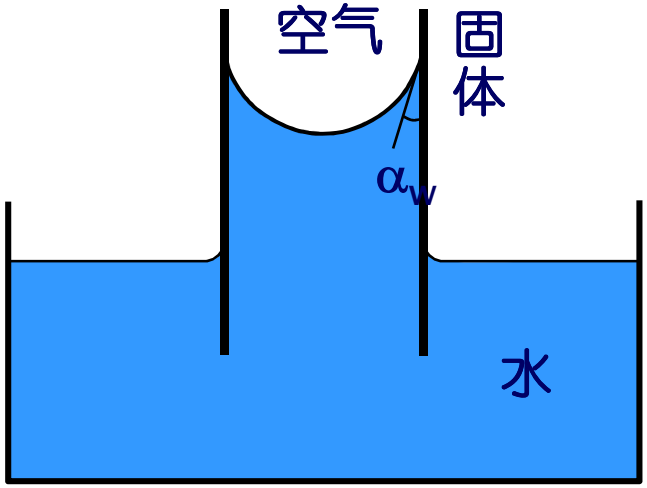
$$\vec{T}_{sg} - \vec{T}_{sl} = \vec{T}_{lg}\cos\alpha$$

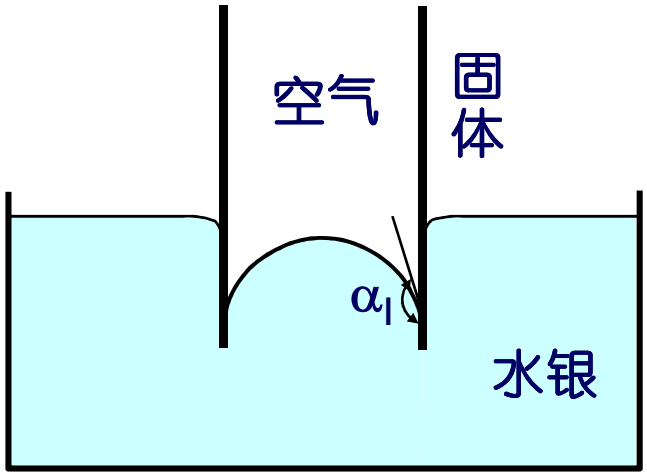


- 接触角的大小反映了液体和固体表面作用力的相对强弱。接触角越小，液体对固体表面的湿润性越强

固-液-气体系及湿润角

P218 4.2.2 1 图4–4

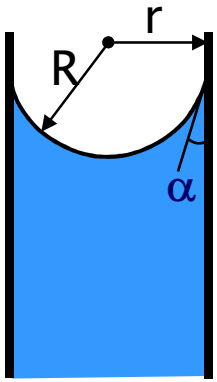




- 接触角对固-液-气交界面的几何形状以及相应的物理性质具有重要的影响
- 在毛管中，湿润类型的接触角（如水）将引向液面上升；非湿润类型的接触角（如汞）将引向液面下降

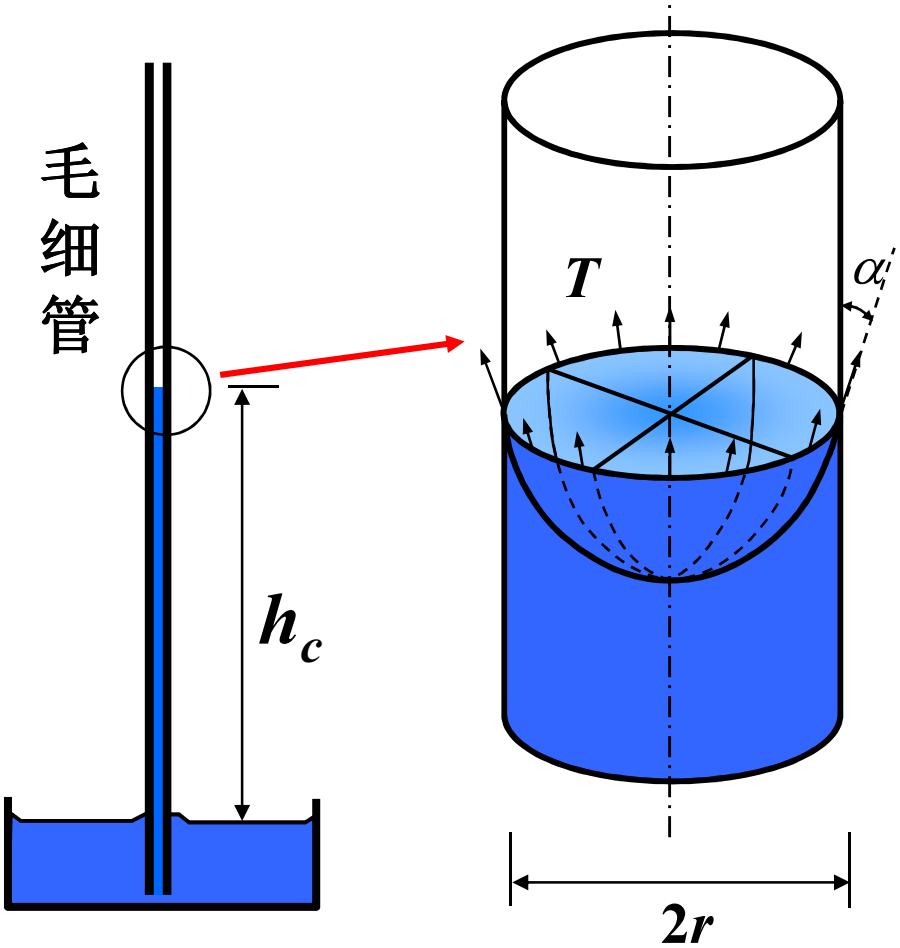
毛管中水气的界面效应

P218 4.2.2 1 图4-5



接触角 α	性质	交界面 R	出现的情况
α=0°	理想的润湿表面	r	大部分土体在干燥过程中
0°<α <90°	部分润湿的表面	r/cos α	大部分土体在浸湿过程中呈现出一定的接触角
α=90°	中性表面	∞	气-水交界面无压力变化
90°<α <180°	部分排斥性表面	-r/cos α	将出现毛细水下降现象，水压高于气压。当土体遭受极其高温（如森林大火）、含有特定有机孔隙液体、富含有机物时将出现此类现象
α=180°	理想的排斥表面	-r	水压高于气压，该现象在非饱和土中较罕见

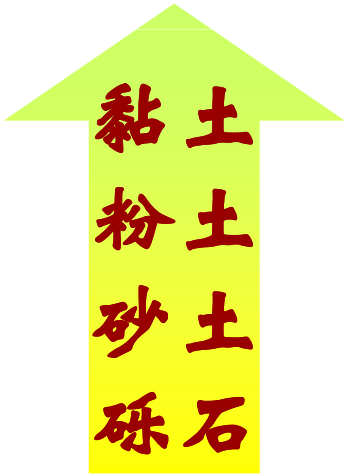
毛管中接触角的可能取值范围



$$\pi r^2 h_c \gamma_w = 2\pi r T \cos\alpha$$

上升高度 $h_c = \dfrac{2T\cos\alpha}{r\gamma_\omega}$

☞ 毛细升高与孔径成反比



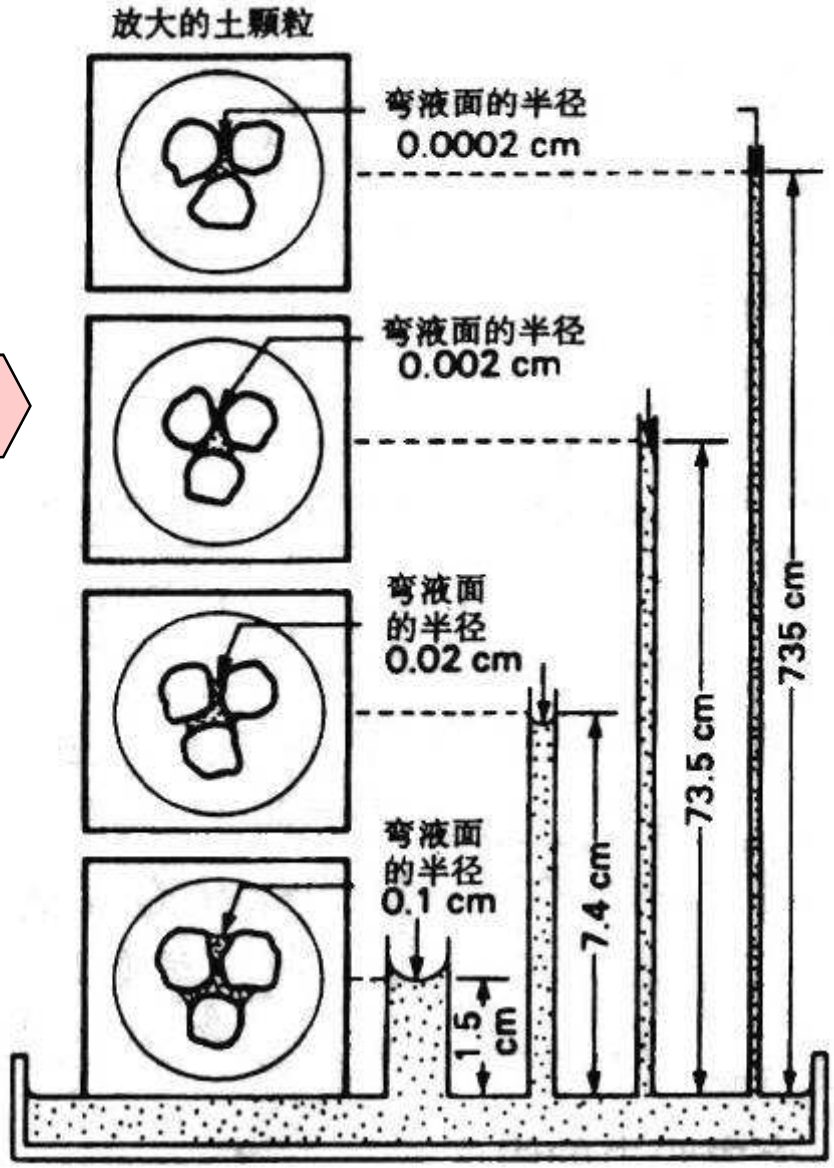
毛管中水上升的高度

P219 4.2.2 1 图4-5

毛细力与孔隙半径

不同曲率半径下毛细管中的水-气分界面

澳洲蜥蜴-毛细吸水

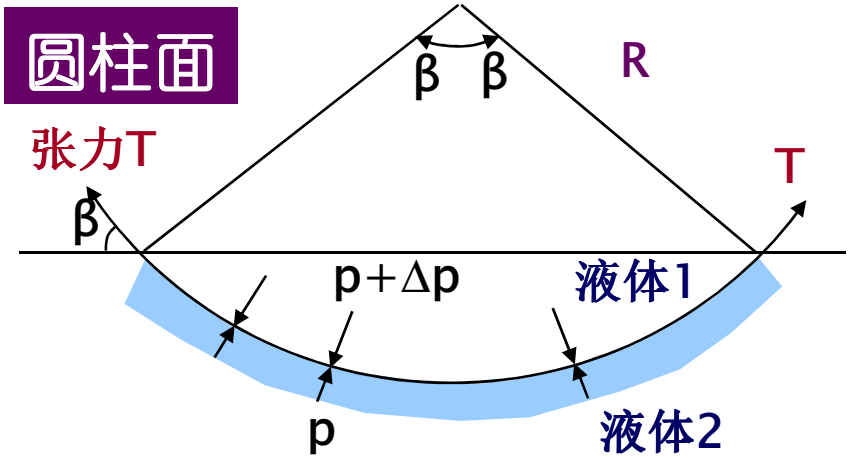


1 毛细水和毛细上升高度

2 土中吸力

3 吸力的量测与土-水特征曲线

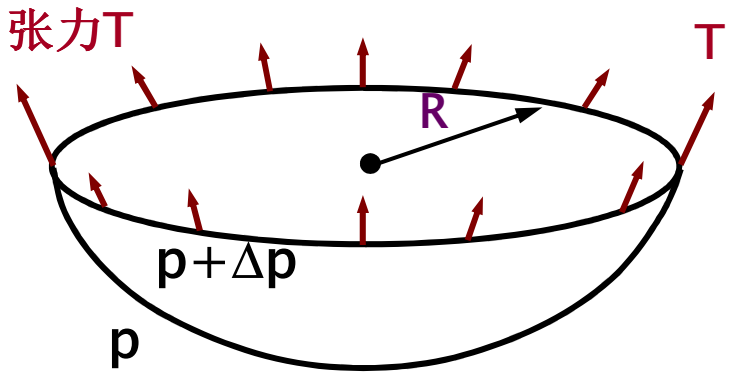
圆柱面

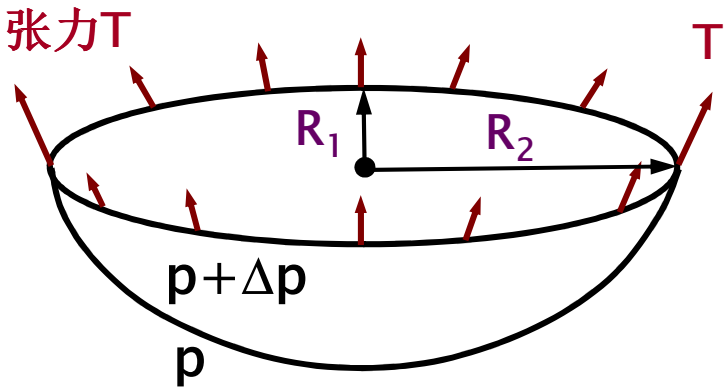


$$2T\cdot\sin\beta = 2\int_0^{\beta}\Delta p\cdot\cos\alpha\cdot R\cdot d\alpha$$

$$= 2\cdot R\cdot\Delta p\cdot\sin\beta$$

$$\Delta p = \frac{T}{R}$$



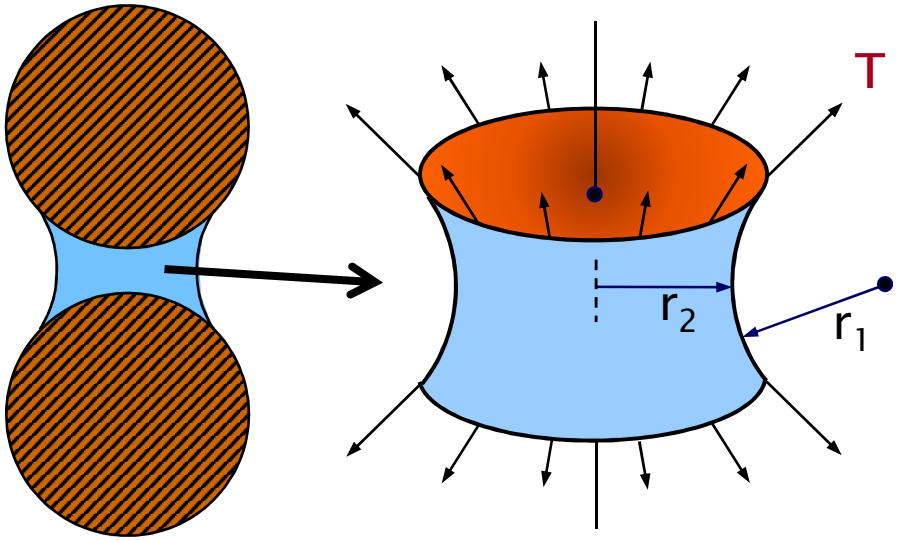


球面 $\Delta p = \dfrac{2T}{R}$

椭球面 $\Delta p = T\left(\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}\right)$

交界面两侧的压力差

■ 水–气交界面两侧的压力差称为基质吸力



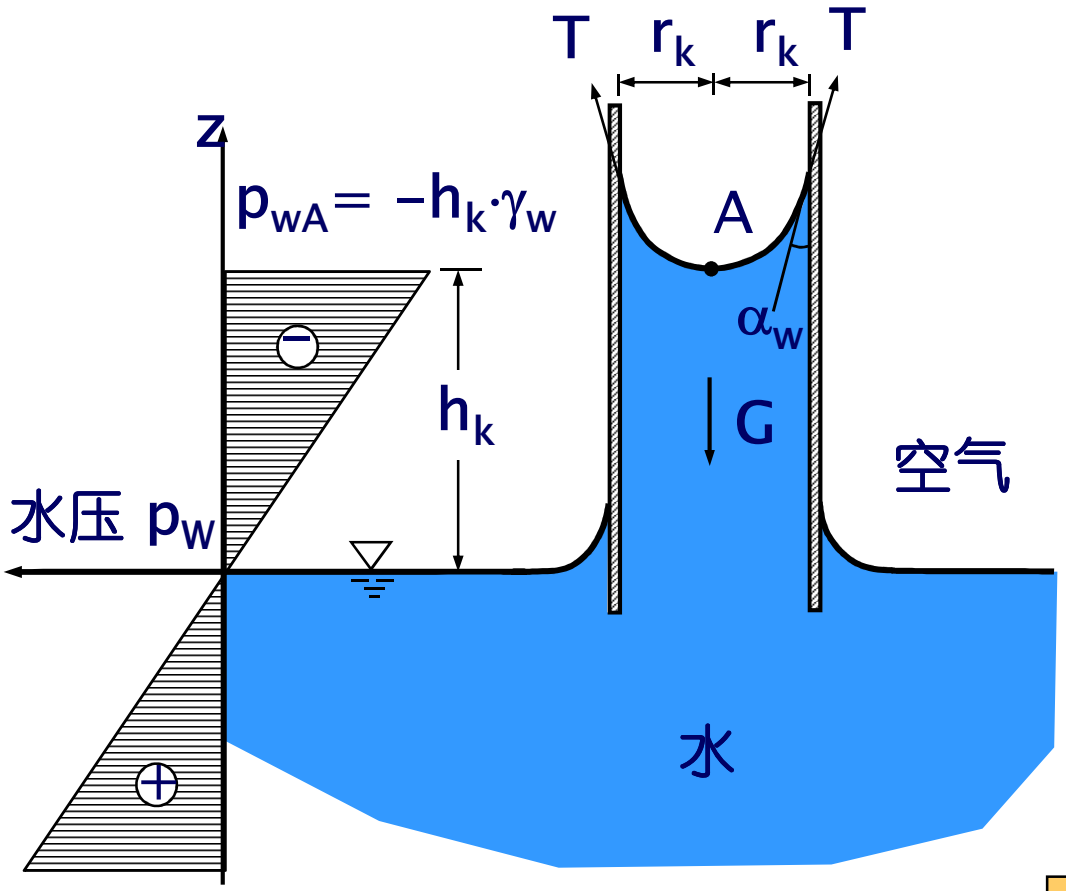
- 曲率半径r1的球状交界面凹向水相，使水相压力降低
- 曲率半径r2的圆柱状交界面凸向水相，使水相压力增加
- 水–气交界面两侧压力差为：

$$\Delta p = T\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

- 大多数情况下，基质吸力值是正值，这是因为在非饱和条件下，一般r_1小于r_2

☞ 土体颗粒间的孔隙结构和气–水交界面几何形状非常复杂

球状砂粒间的气-水交界面



$$h_k = \frac{2 \cdot T}{r_k \cdot \gamma_w} \cdot \cos\alpha$$

对A点：

水压力： $p_{wA} = -h_k \cdot \gamma_w$

气压力： $p_{aA} = 0$

气、水压力差:

$$p_c = p_a - p_w = \frac{2 \cdot T}{r_k} \cdot \cos\alpha$$

基质吸力 ＝ 毛细力

基质吸力与毛细力

P219

- 土中吸力反映土中水的自由能状态。土中水的自由能可用土中水的部分蒸气压量测。其与孔隙水的部分蒸气压之间的热动力学关系可用下式表示：

$$\psi = -\frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{T}\cdot\rho_{\mathbf{w}}}{\omega_{\mathbf{v}}}\ln\left(\frac{\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{v}}}{\bar{\mathbf{u}}_{\mathbf{v0}}}\right)$$

同一温度下，纯水平面上方的饱和蒸汽压

其中，

ψ - 土的总吸力（kPa）
R - 通用气体常数 = 8.31432J/(mol K)
T - 绝对温度，T=(273.16+t°) (K)
ρ_w-水的密度数(kg/m^3)
ω_v-水蒸气的克分子量=18.016kg/kmol

土中吸力的理论

- **总吸力** 为土中水的自由能，它是通过量测与土中水处于平衡的部分蒸气压（相对于与自由纯水处于平衡的部分蒸气压）而确定的等值吸力。
- **基质吸力** 为土中水自由能的毛细部分，它是通过量测与土中水处于平衡的部分蒸气压（相对于和与土中水相同成份的溶液处于平衡的部分蒸气压）而确定的等值吸力。
- **渗透吸力** 为土中水自由能的溶质部分，它是通过量测和与土中水相同成份的溶液处于平衡的部分蒸气压（相对于与自由纯水处于平衡的部分蒸气压）而确定的等值吸力。

总吸力及其组成

（Aitchison,1965）

P220

1 毛细水和毛细上升高度

2 土中吸力

3 吸力的量测与土-水特征曲线

- ☞ 吸力及土中水形态
- ☞ 土颗粒与土中水的相互作用
- ☞ 界面张力和毛细现象
- ☞ 基质吸力

非饱和土水的形态和基质吸力

P215 4.2

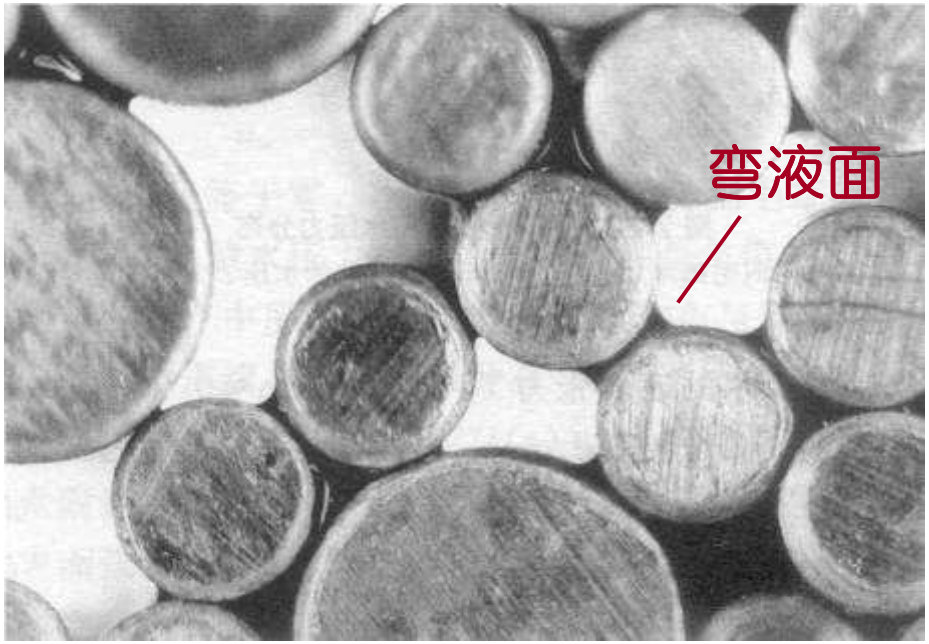
- 基质吸力与水饱和度
- 土水特征曲线及特性
- 土水特征曲线经验公式
- 土体典型剖面的吸力分布

非饱和土土水特征曲线

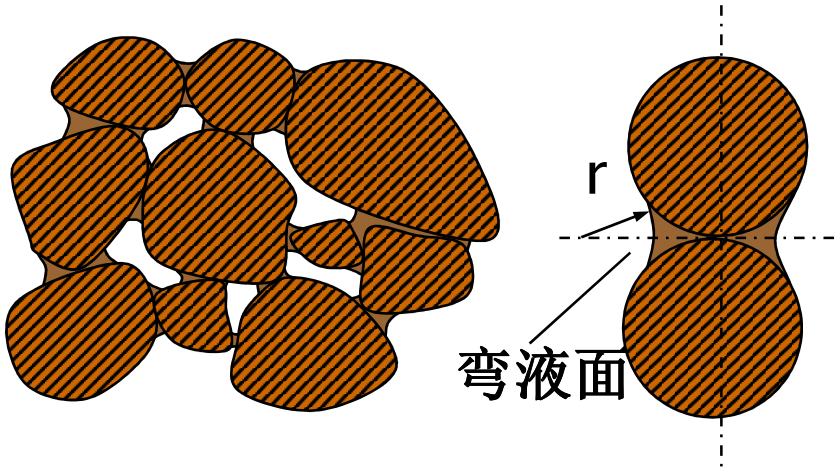
P221 3

金属棒试验

湿润流体相（水相）和固体表面附着力相对较大，首先占据比表面积较大的小孔隙处。非湿润流体相（气相）和固体表面附着力相对较小，占据比表面积较小的大孔隙处。交界面形成向水相凹的弯液面



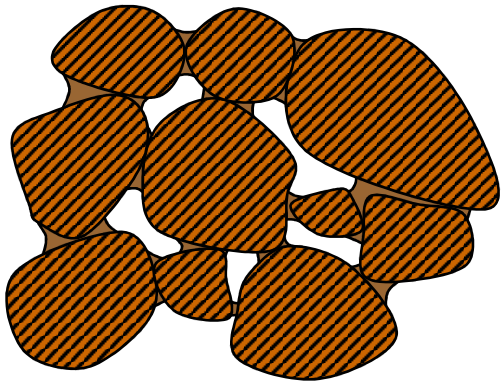
当水量较小时，气水交界面位于小孔隙处，其弯液面曲率半径较小。随着水量增加，弯液面曲率半径逐渐增加



- 在非饱和土中，孔隙中含有水和气，此时水多集中于颗粒间的缝隙处，称毛细角边水。
- 由于毛细张力的作用，会形成如图所示的弯液面，使毛细角边水产生负压力，颗粒则受正压力。
- 这是稍湿的砂土颗粒间存在假凝聚力的原因

土颗粒缝隙处的弯液面

$$p_c = p_a - p_w = \frac{2\sigma_0}{r_k}\cos\alpha$$

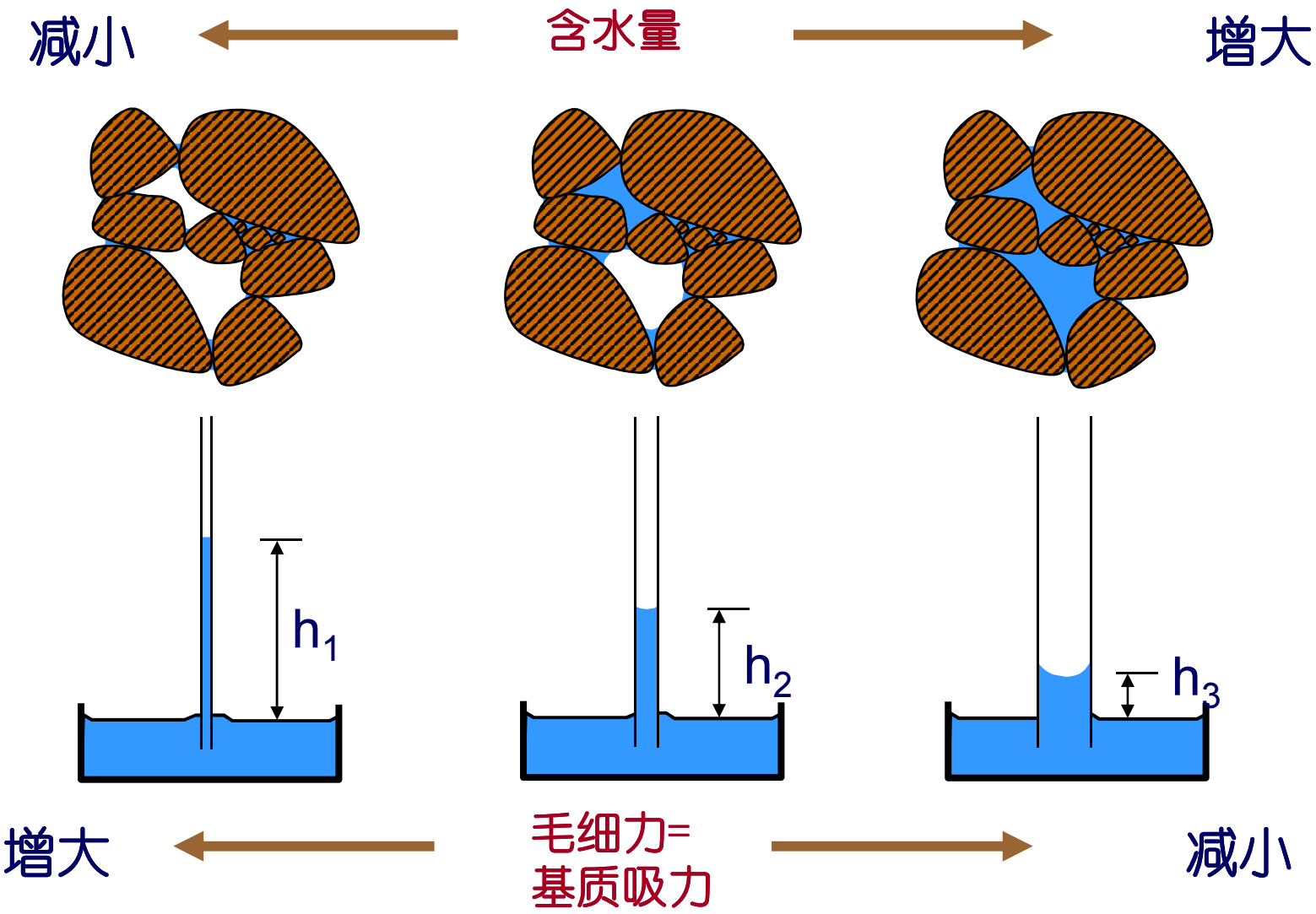


空气　　水　　固体颗粒

- 小孔隙对应大的基质吸力
- 多相界面在小孔隙（曲率半径最小）处最易达到平衡
- 湿润流体相和固体表面附着力最大，通常首先占据小孔隙
- 非饱和土中水为湿润流体相，通常首先占据小孔隙
- 饱和度较小时，孔隙水主要存在小孔隙处，基质吸力大；水饱和度增加，水相孔隙增大，基质吸力变小

$$p_c = f(S_r)$$

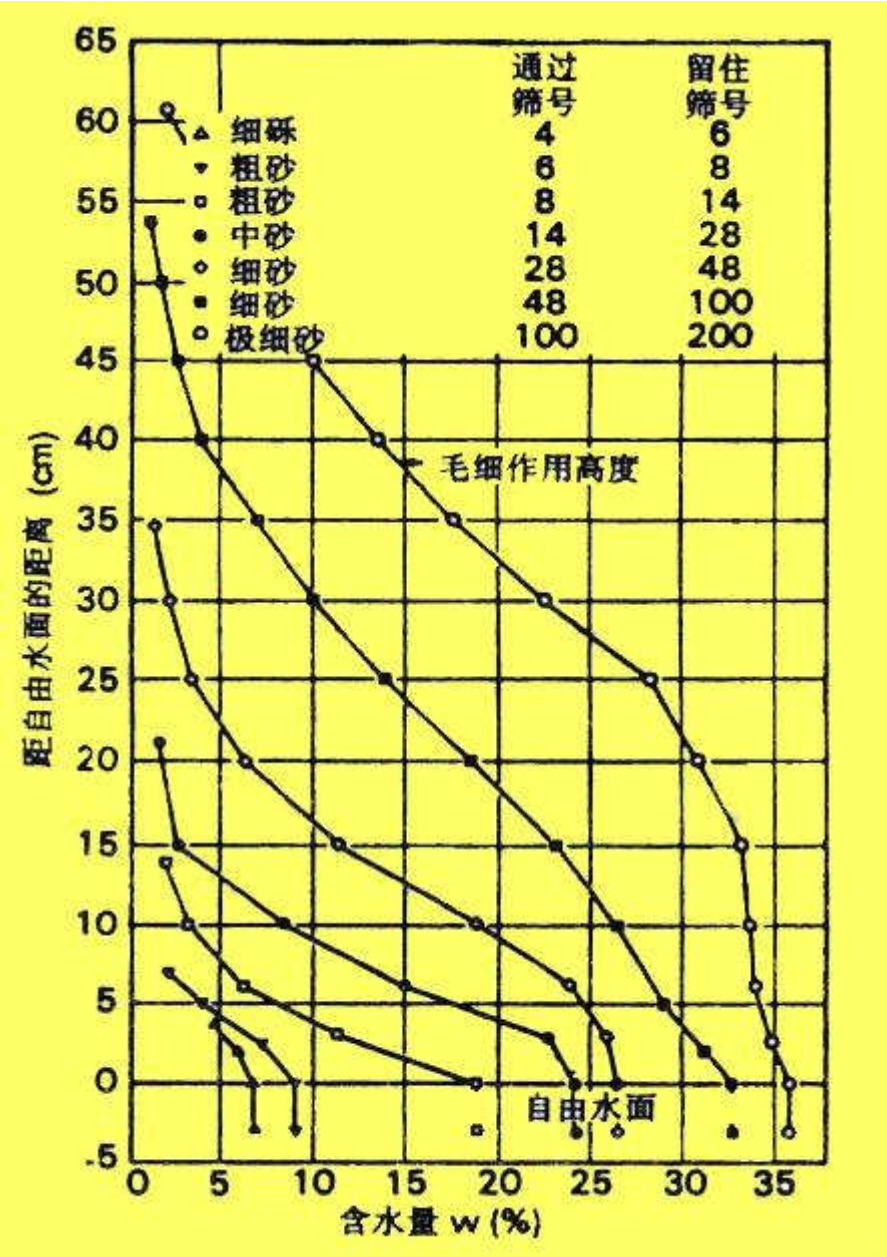
基质吸力与水饱和度



基质吸力与水饱和度

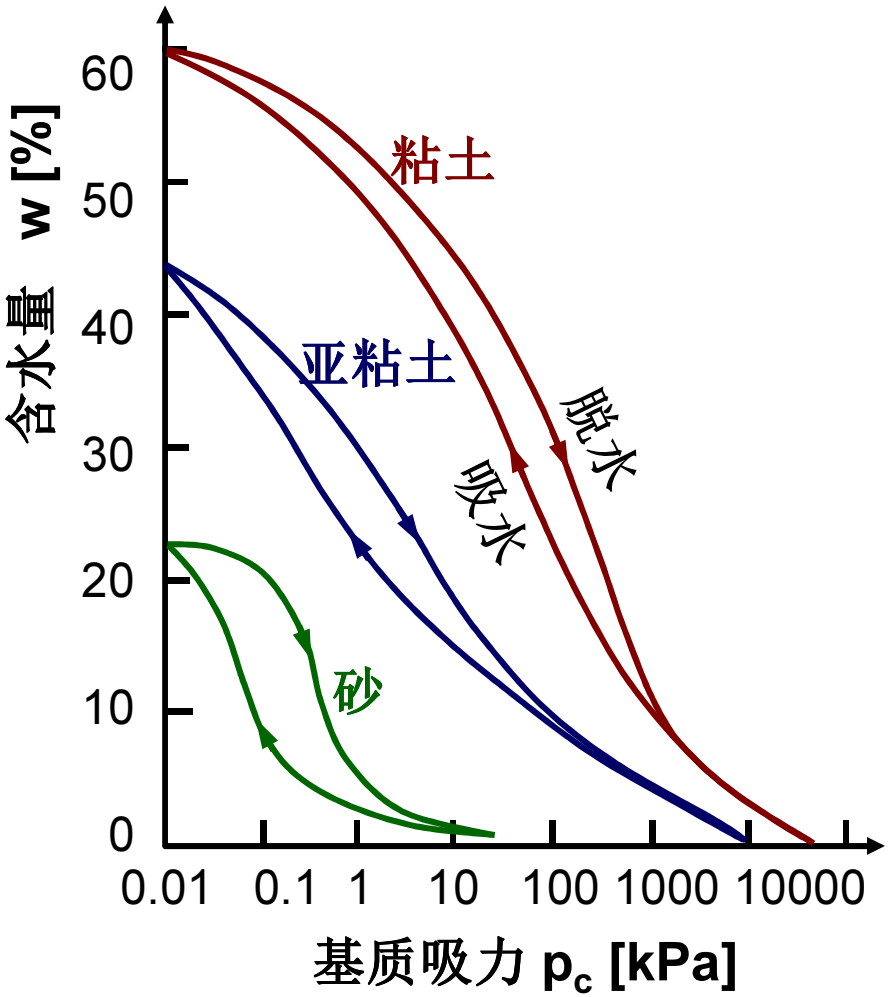
不同粗细砂土中的毛细水分布

- 在均匀砂的开口管试验中，砂装在一端浸没水中的玻璃管内
- 在毛细区内砂的含水量不同，而且相应于浸润过程和相应于脱水过程的含水量不同



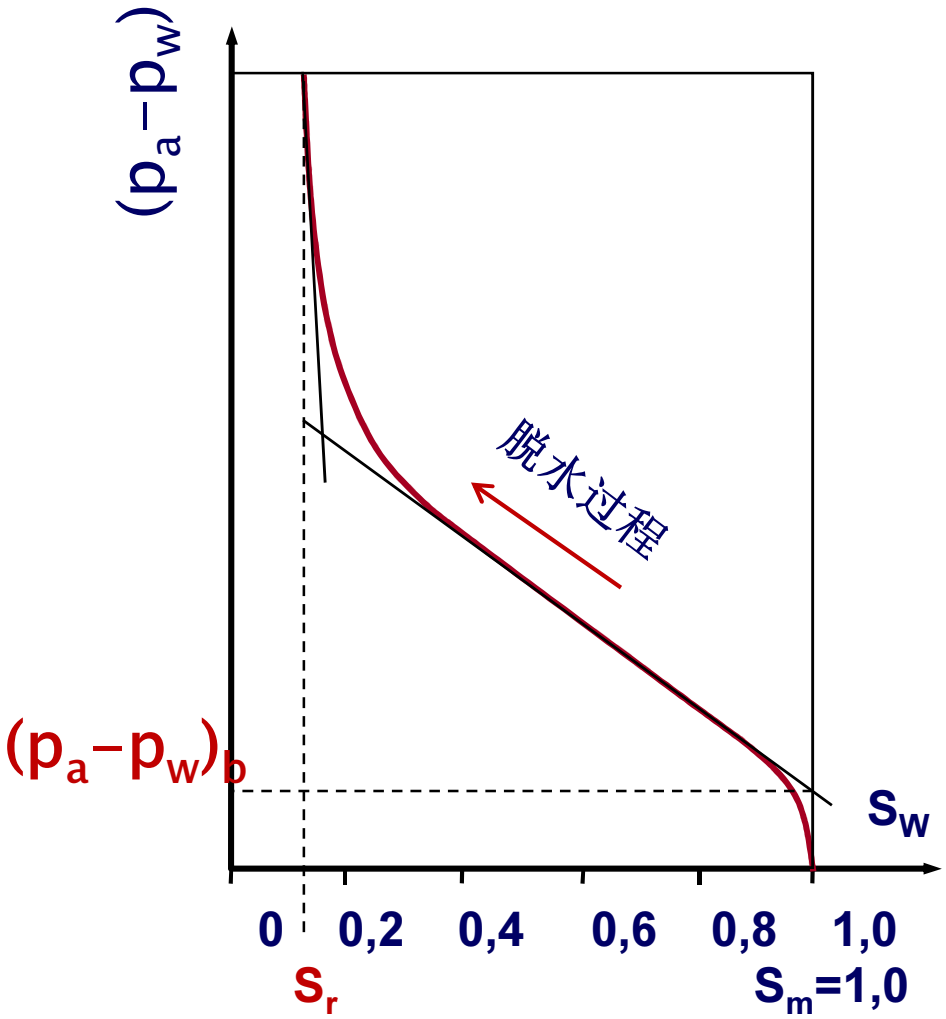
P221 图4-8

- 基质吸力与土的饱和度或含水量有关，它们之间的关系曲线称土水特征曲线
- 它反映了土体孔隙系统的持水能力。土水特性不仅取决于流体的特性，而且还于土的结构构成，吸水、脱水过程也有关



土水特征曲线

P223 图4-11

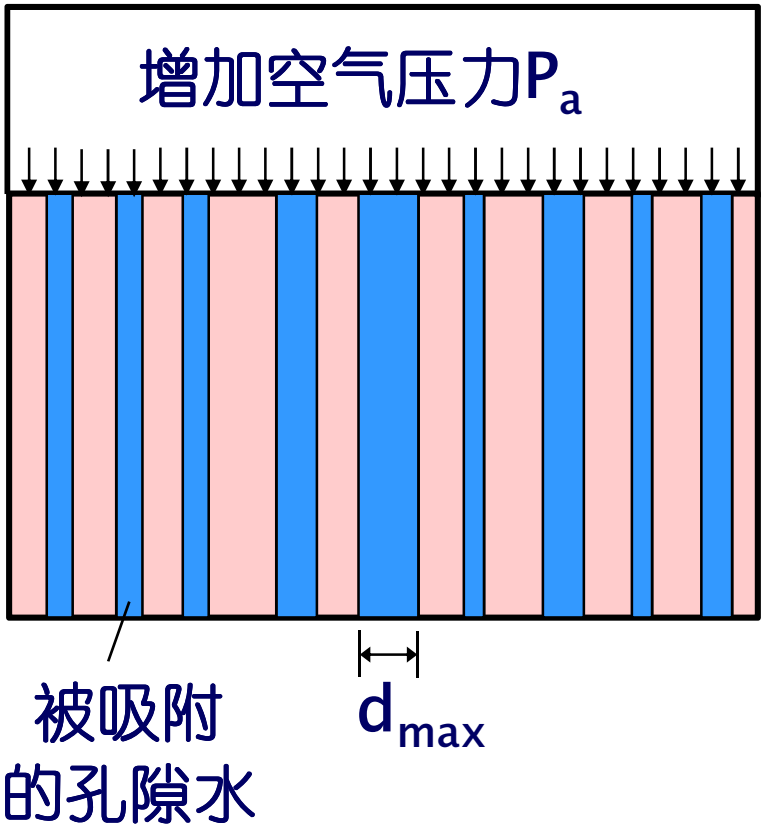


- $(p_a-p_w)_b$进气压力：在该压力下，空气开始进入饱和试样的最大孔隙。随着基质吸力的增高，土体试样种相对较小的孔隙也依次脱水
- Sr 残余水饱和度：在该饱和度下，增加基质吸力并不引起饱和度的显著变化

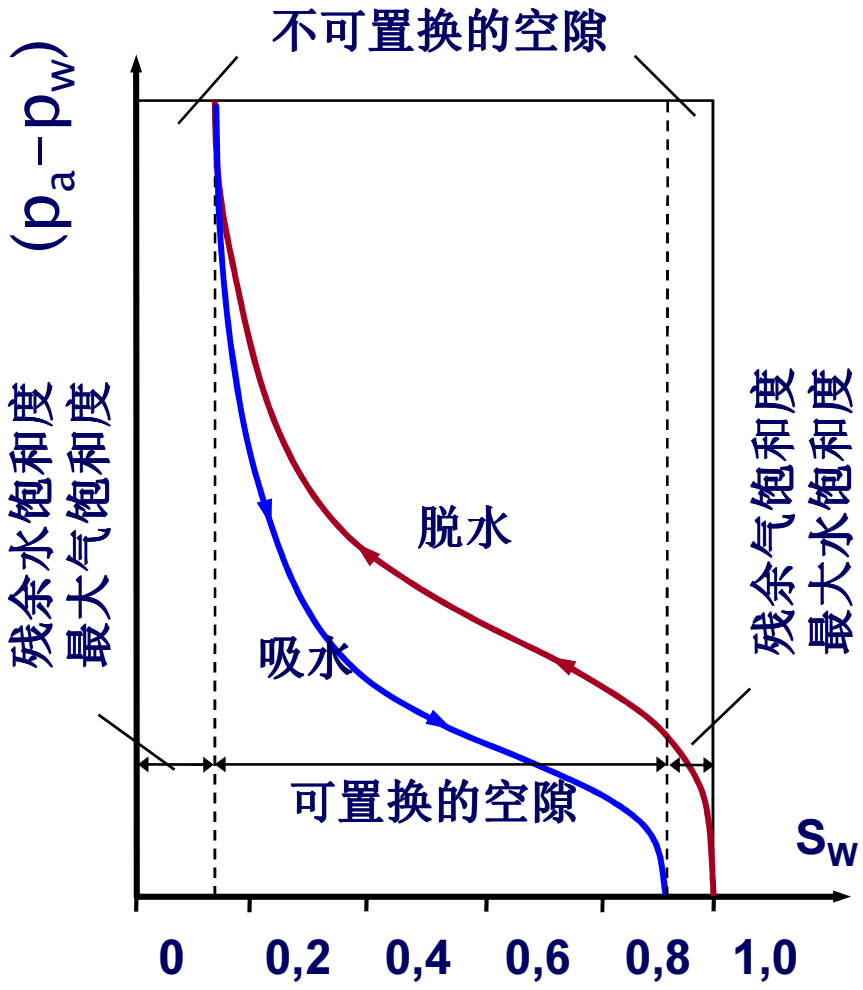
典型土水特征曲线

P223 图4-12

- 土的进气值$(p_a-p_w)_b$是空气进入土孔隙时必需达到的基质吸力值
- 进气值在石油工业中称为置换压力，而在陶瓷工业中则称为冒泡压力(Corey, 1977)
- 它是土中最大孔隙尺寸的一种度量。



土的进气值



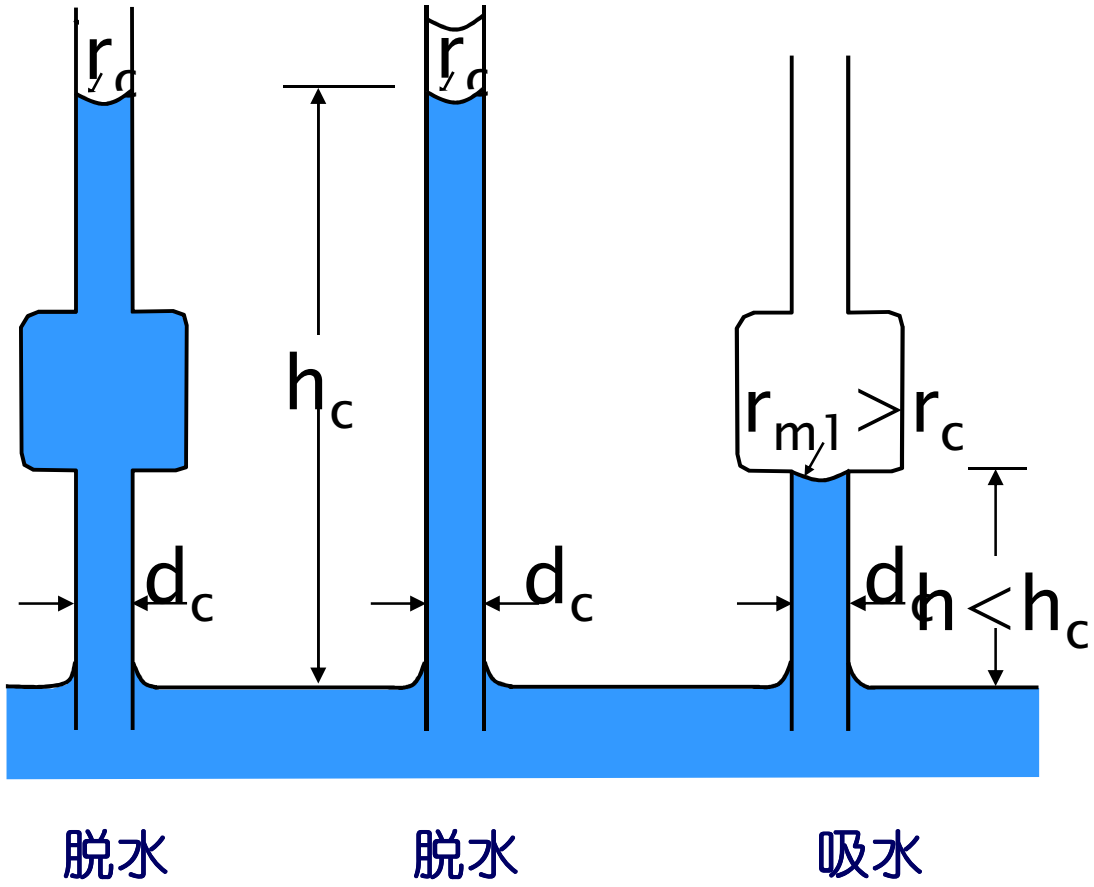
- 残余气饱和度Sm：当基质吸力减小到为零时的含气量　说明存在不可置换的孔隙
- 滞后效应：脱水和吸水过程得到的土水特征曲线是不同的，对应同一基质吸力，两条曲线上对应不同的饱和度

典型土水特征曲线

P223

产生滞后效应的原因是土中毛细水具有：

- ✧ 瓶颈效应
- ✧ 雨滴效应
- ✧ 封闭效应

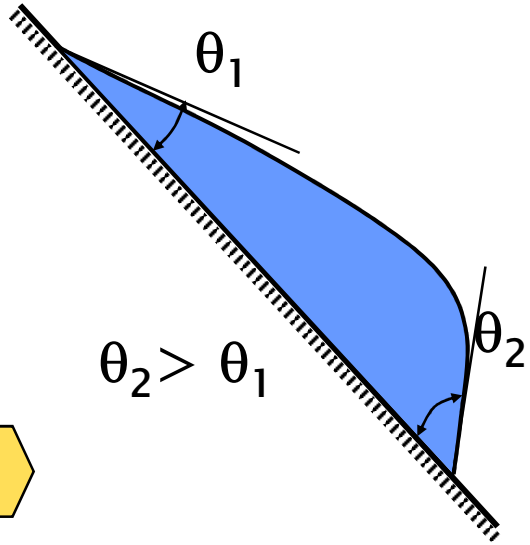


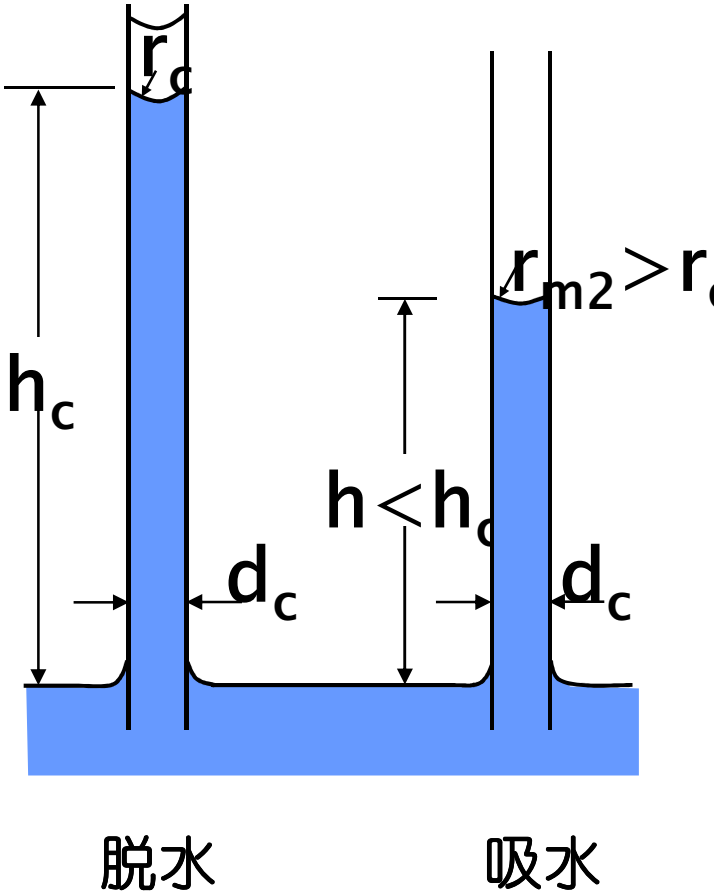
土水特征曲线的滞后效应

P220 Fig4-6

产生滞后效应的原因是土中毛细水具有：

- ✧ 瓶颈效应
- ✧ 雨滴效应
- ✧ 封闭效应

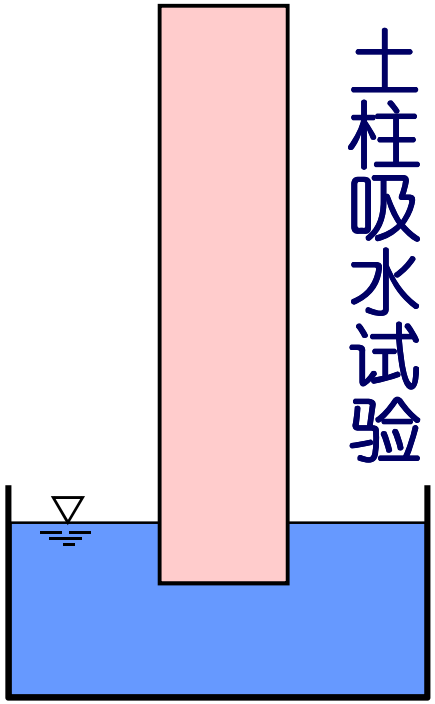




土水特征曲线的滞后效应

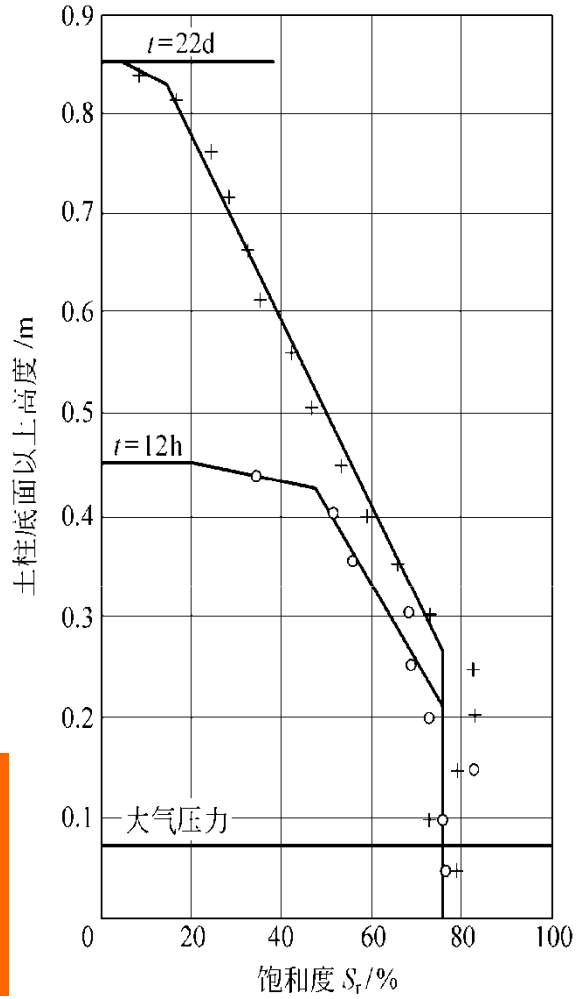
产生滞后效应的原因是土中毛细水具有：

- ✧ 瓶颈效应
- ✧ 雨滴效应
- ✧ 封闭效应



土柱吸水试验

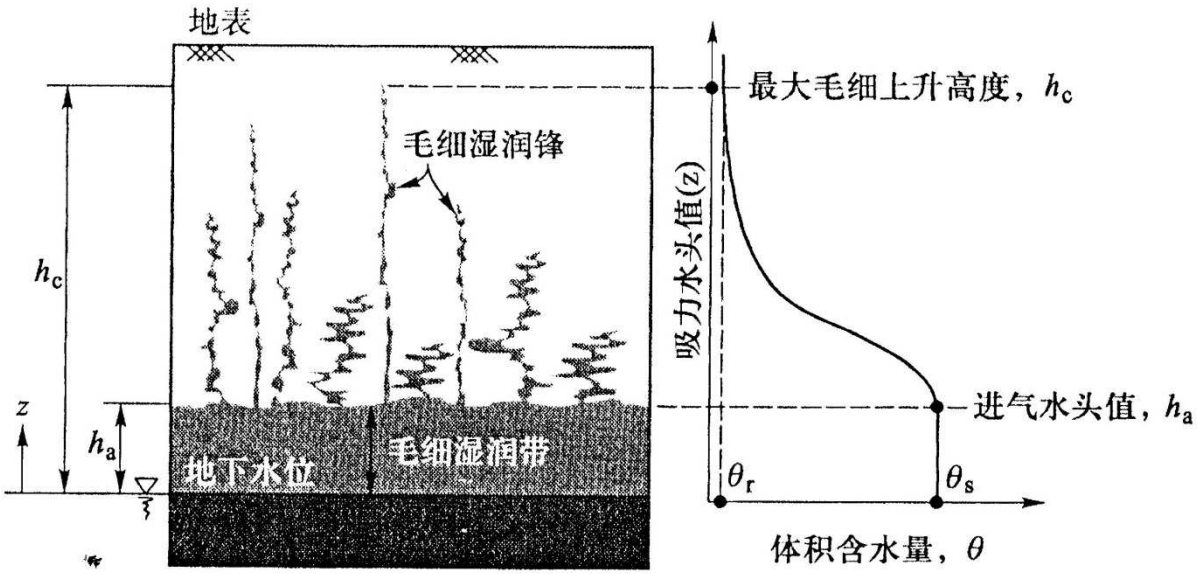
土中情况复杂，不能形成完全“毛细饱和”，一部分空气会被封闭在孔隙中



土水特征曲线的滞后效应

P221 图4-8

孔隙水在毛细吸力作用下上升到高于地下水位的某一高度



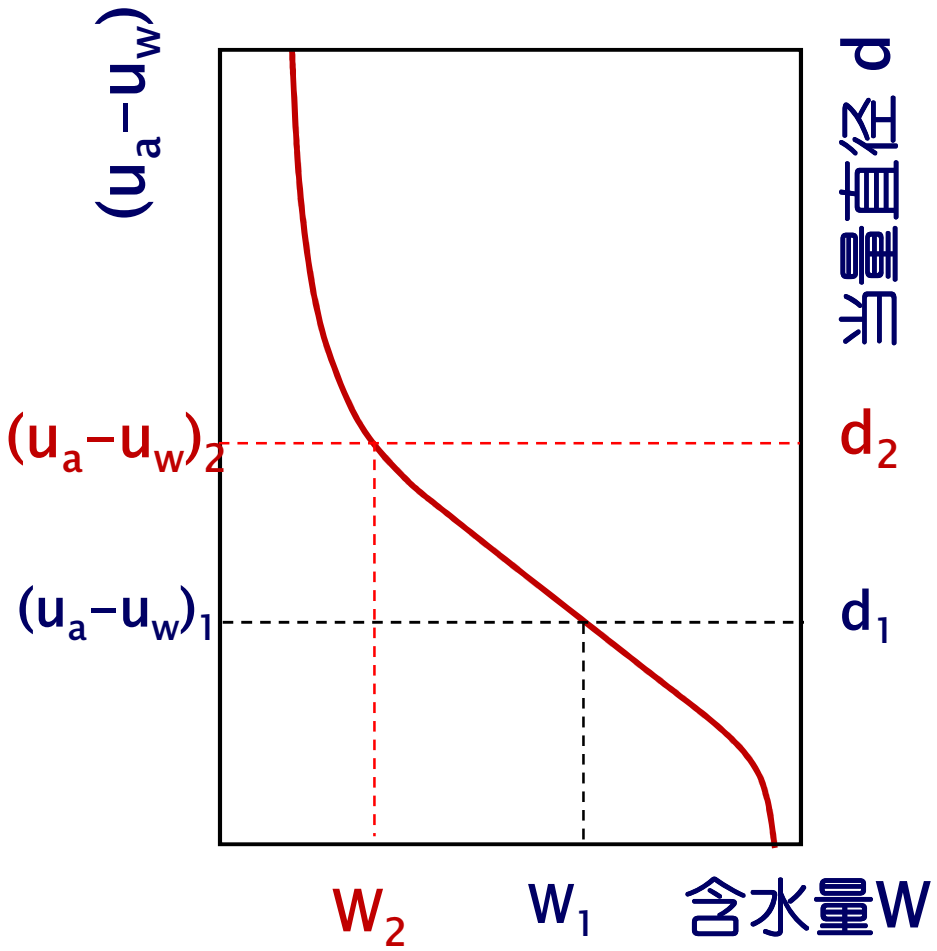
- 当吸力达到进气水头时，气体开始置换土中孔隙水。由地下水位延伸到该处的饱和带常被称为毛细湿润带
- 在进气水头高度以上，土体含水量将随着高度的增加而降低，最小直径的毛细管水将上升到最大高度h_c
- 吸力水头较大时，土体的含水量非常少，主要以颗粒吸附水或不连续的弯液状“悬着”水的形式存在。该含水量也常称之为残余含水量θ_r

毛细上升与孔隙的持水特征

☞ 若将土壤中的孔隙设想为各种孔径的圆形毛管，那么吸力和毛管直径d的关系可简单地表示为：

$$u_a - u_w = \frac{4T\cos\alpha}{d}$$

☞ 根据吸力由此式计算所得的孔径d称为当量孔径



土体孔隙的当量直径

§4.6 非饱和土土水特征曲线 – 土水特征曲线经验公式

土水特征曲线经验公式

作　者	公　　式	说　明
Fujita (1952)	$p_c / p_0 = 1 + \frac{1}{S_e} - \frac{1}{a} \cdot \ln\left[\frac{(a-1)\cdot S_e}{a - S_e}\right]$	
Gardner (1958)	$S_e = [1 + (p_c / p_0)^n]^{-1}$	
Brooks & Corey (1964)	$S_e = (p_E / p_c)^m$	适用于$p_c \geq p_E$
Farrel & Larson (1972)	$p_c / p_E = \exp[a \cdot (1 - S_e)]$	适用于$p_c \geq p_E$
van Genuchten (1980)	$S_e = [1 + (p_c / p_0)^n]^{-m}$	通常取 $n = 1/(1-m)$
Williams et al. (1983)	$\ln p_c = a + b \cdot \ln S_w$	
McKee & Bumb (1984)	$S_e = \exp[-(p_c - p_E)/b]$	适用于$p_c \geq p_E$
McKee & Bumb (1987)	$S_e = 1 / \left[1 + \exp\left(\frac{p_c - a}{b}\right)\right]$	
Fredlund & Xing (1994)	$S_w = \left(\ln\left[e + (p_c / p_0)^n\right]\right)^{-m}$	由假设的土体孔隙大小的分布导出
	$S_w = \left[1 - \frac{\ln(1 + p_c / p_r)}{\ln(1 + 10^6 / p_r)}\right] \cdot \left(\ln\left[e + (p_c / p_0)^n\right]\right)^{-m}$	考虑当 $S_w \approx 0$ 时，$p_c \approx 10^6$ kPa
	$S_e = (\ln[e + (p_c / p_0)^n])^{-m}$	考虑土的剩余饱和度

$p_c = p_l - p_w \triangleq$ 基质吸力

$p_E \triangleq$ 进气压力

$a, b, m, n, p_0, p_r \triangleq$ 拟和参数

$p_0 \triangleq$ 和 p_E 相关的参数

$S_w \triangleq$ 水饱和度

$S_e = (S_w - S_r) / (S_m - S_r) \triangleq$ 有效饱和度

$S_m, S_r \triangleq$ 最大和剩余饱和度

$p_r \triangleq$ 和剩余饱和度时基质吸力大小有关的常数

P224

$$S_e = \left\{ \frac{(u_a - u_w)_b}{(u_a - u_w)} \right\}^{\lambda} \qquad \text{for } (u_a - u_w) > (u_a - u_w)_b$$

式中： $(u_a - u_w)_b$ 进气压力

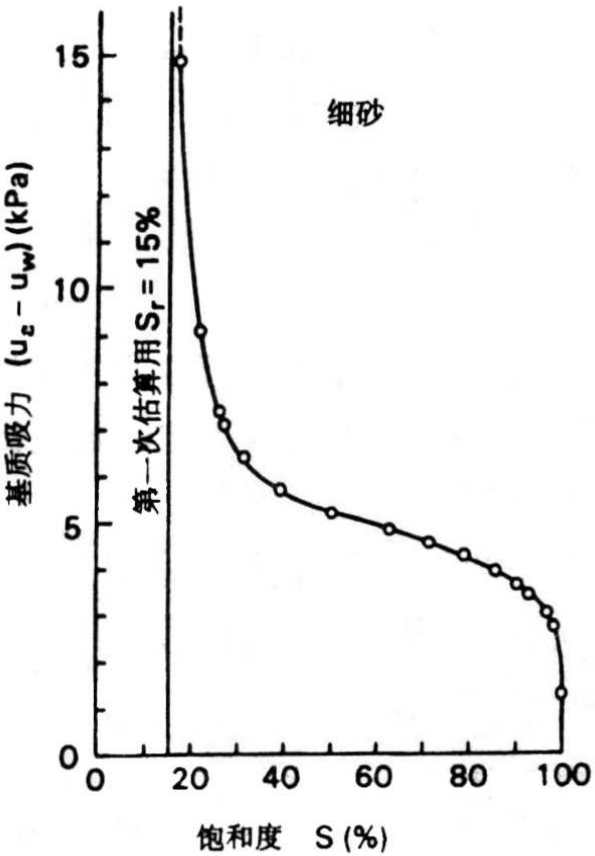
$$S_e = \frac{S_w - S_r}{S_m - S_r}$$ 为有效饱和度

其中，S_r、S_m和S_w分别为剩余、最大和水饱和度

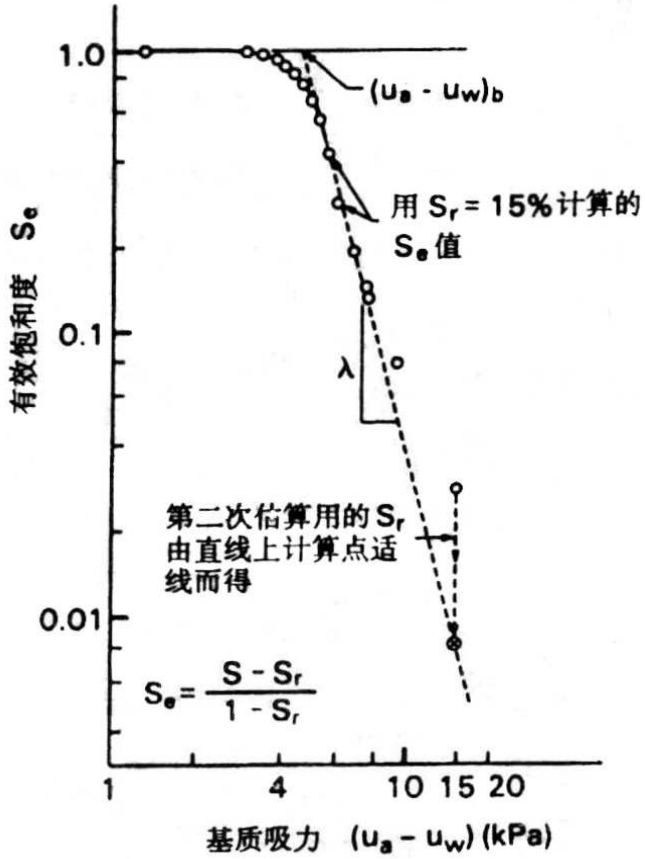
Brooks和Corey公式（1964）

P224

§4.6 非饱和土土水特征曲线 - 土水特征曲线经验公式



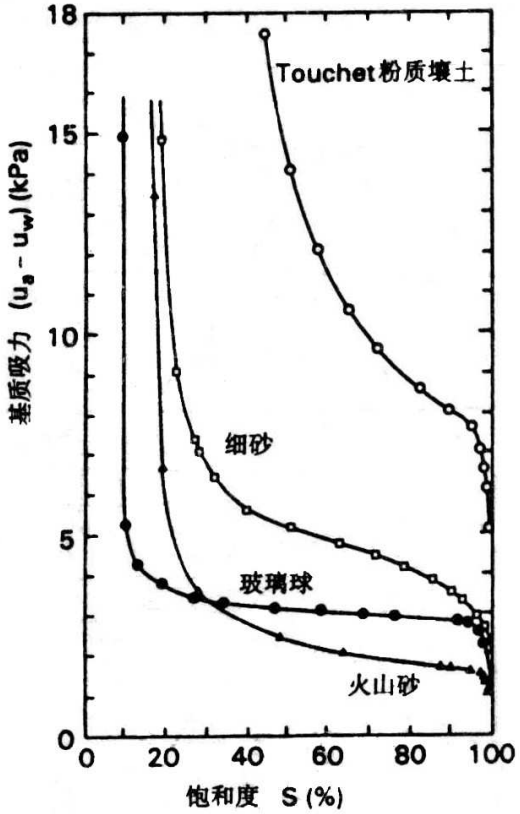
基质吸力与饱和度关系曲线



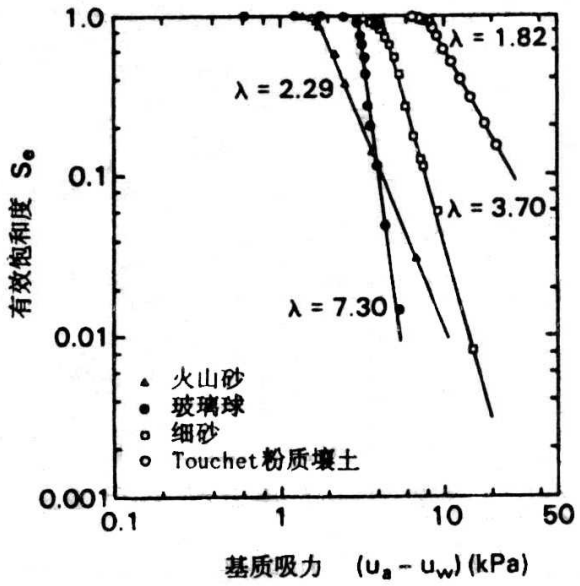
有效饱和度与基质吸力关系曲线

进气值$(u_a - u_w)_b$、剩余饱和度S_r及孔隙尺寸分布指标λ的确定

§4.6 非饱和土土水特征曲线 - 土水特征曲线经验公式



基质吸力与饱和度关系曲线



有效饱和度与基质吸力关系曲线

具有不同λ值的各种典型基质吸力与饱和度关系曲线

（引自 Brooks 和 Corey， 1964 ）

§4.6 非饱和土土水特征曲线 - 土水特征曲线经验公式

$$S_e = \left[1 + \left(\frac{u_c}{u_0}\right)^{\frac{1}{1-m}}\right]^m \quad \text{或：} \quad u_c = u_0 \cdot \left(S_e^{-\frac{1}{m}} - 1\right)^{1-m}$$

式中，$u_c=(u_a-u_w)$ 为基质吸力；

u_0、m和n为试验常数，通常取：$n = \dfrac{1}{1-m}$

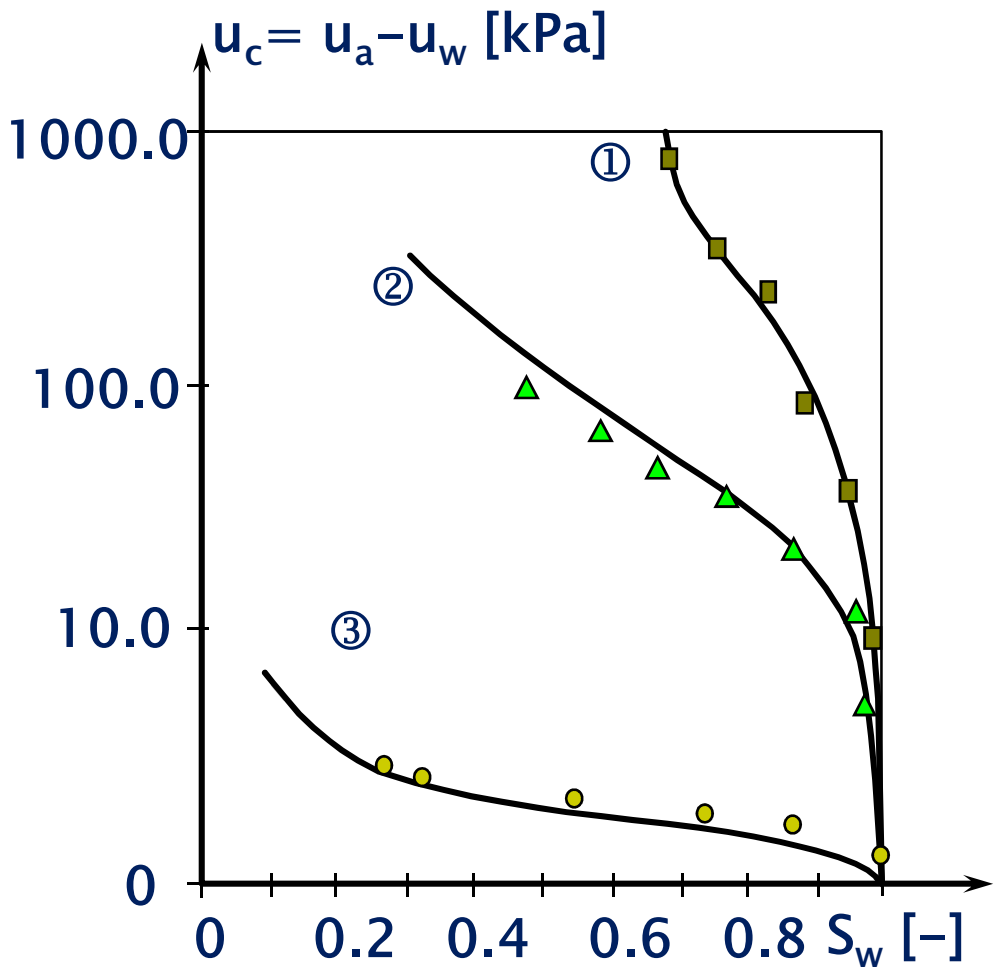
$$S_e = \frac{S_w - S_r}{S_m - S_r}$$ 为有效饱和度

S_r、S_m和S_w分别为剩余、最大和水饱和度

van Genuchten公式（1980）

P224

§4.6 非饱和土土水特征曲线 - 土水特征曲线经验公式



▲ ● ■ } Mualem的实验结果

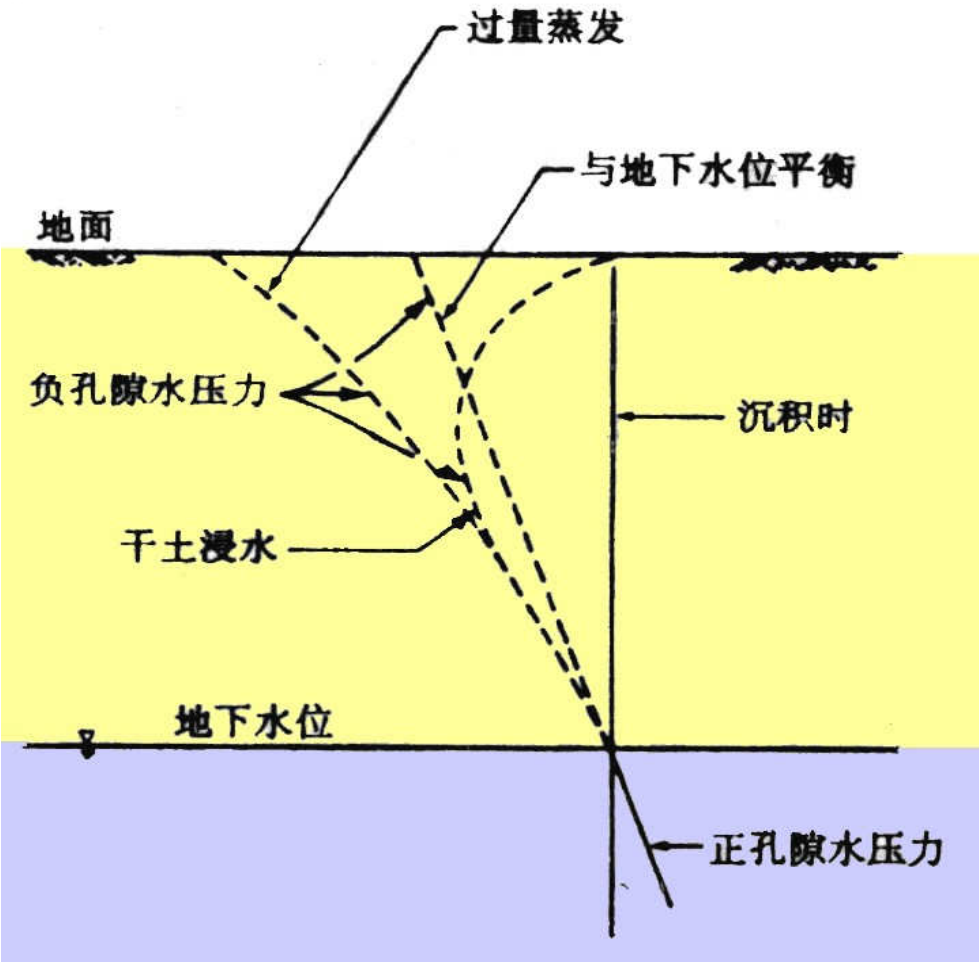
van Genuchten公式拟合

① 粘土: m=0.17, u_0=100 kPa

② 壤土: m=0.36, u_0=35 kPa

③ 砂土: m=0.65, u_0=2.3 kPa

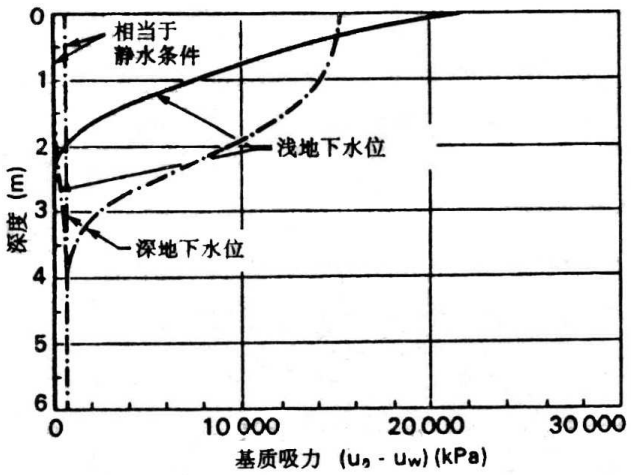
van Genuchten公式



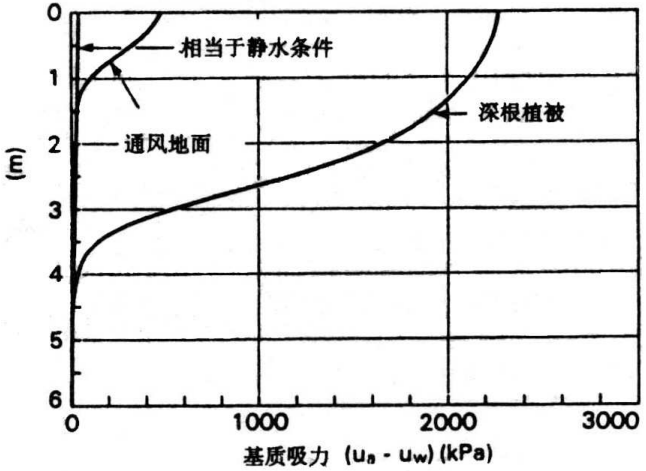
孔隙水压力典型剖面

P220 图4-7

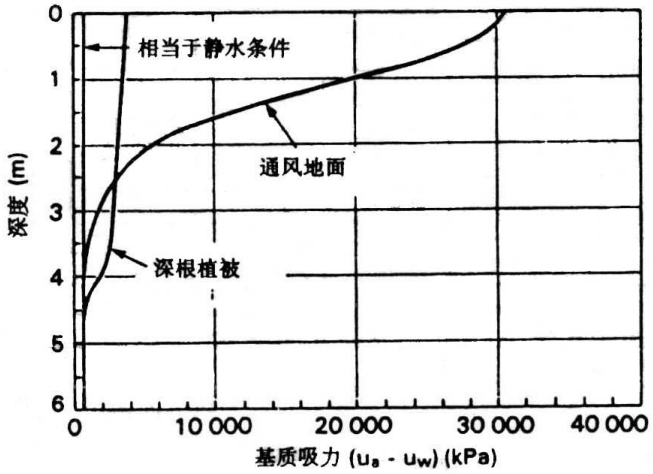
§4.6 非饱和土土水特征曲线 – 土体典型剖面的吸力分布



(a) 季节波动



(b) 浅地下水位情况的吸力变化

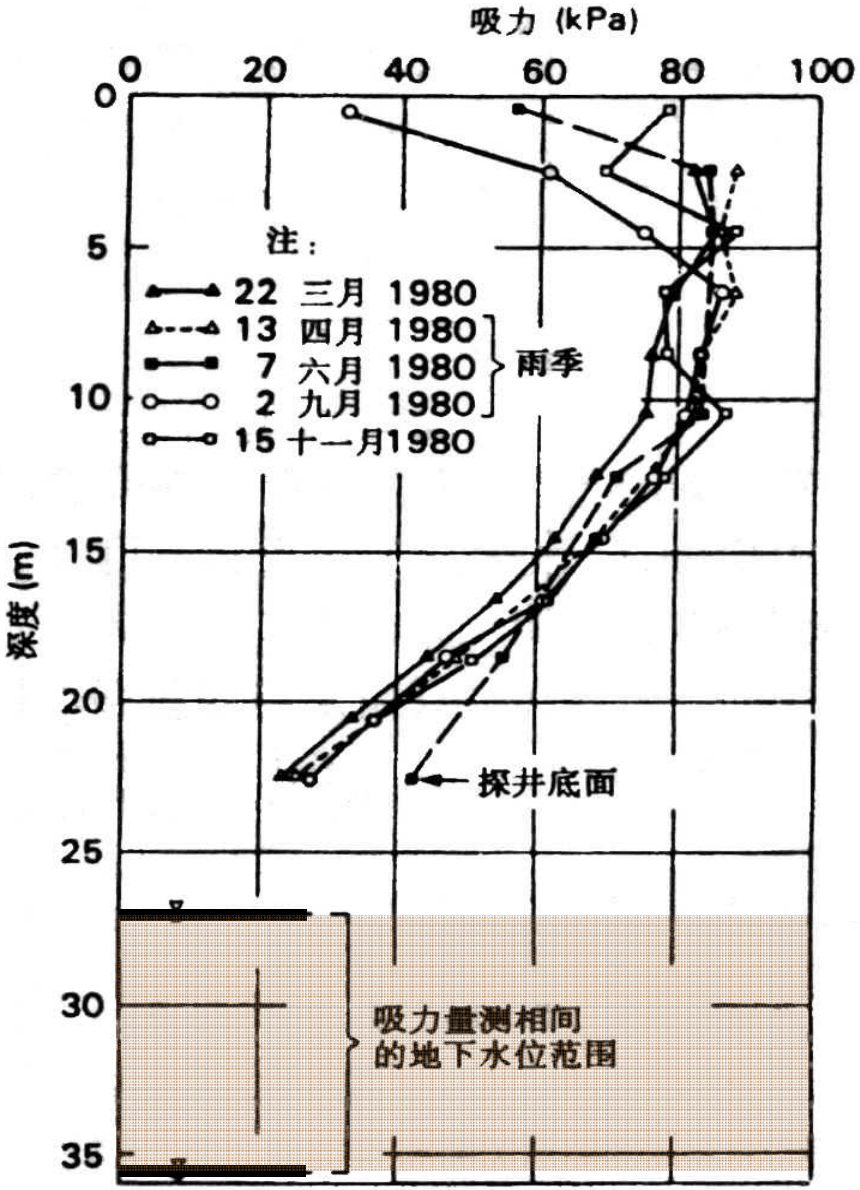


(c) 深地下水位情况的吸力变化

无覆盖地面下的典型吸力剖面

（引自 Blight 修正，1980）

香港某陡坡的原位吸力剖面（引自Sweeney，1982）



☞4.2.3 土的冻胀和冻融作用

1 冻分子结构

2 冻胀

3 融化作用

P224

第四章 土中水及渗流计算

4.1 导言

4.2 土中水的形态及其对土性的影响

4.3 土的渗透性

4.4 二维渗流与流网

4.5 饱和土渗流数值计算的有限元方法

4.6 有关渗流的一些工程问题

- ☞土中水的势能
- ☞达西定律与土的渗透性

4. 3. 1 土中水的势能

P227 4.3.1

土中水的势能：

- ☞ 重力势 ψ_g
- ☞ 压力势 ψ_p
- ☞ 基质势 ψ_m
- ☞ 溶质势 ψ_0

重力势为水的势能，单位体积水的重力势可表示为：

$$\psi_g = Z\gamma_w$$

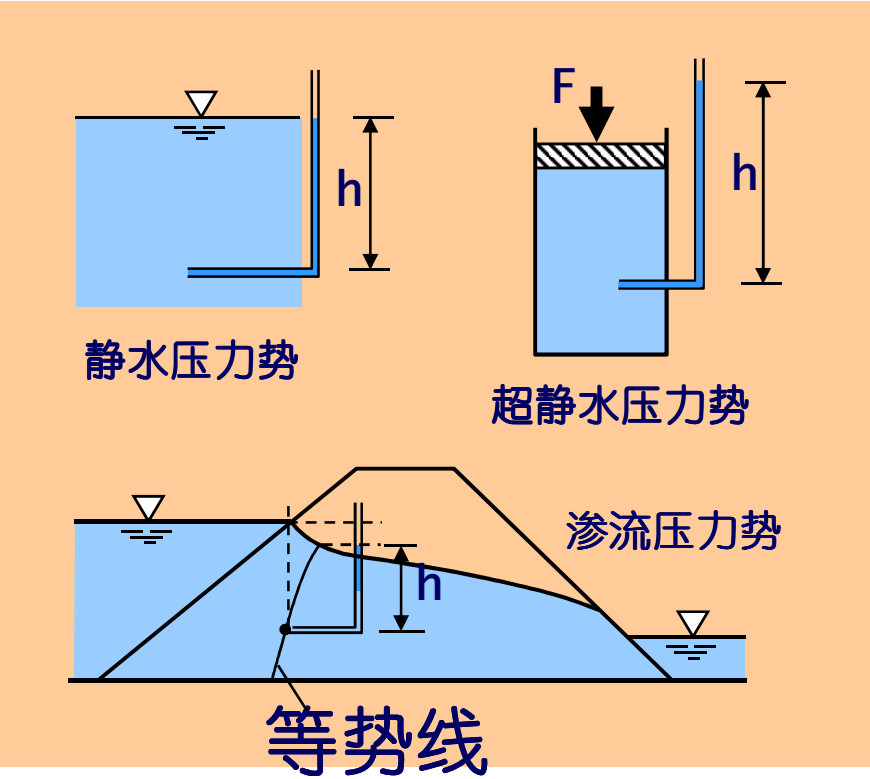
其中，z为所考虑点相对于基准面的竖向距离，在基准面以上取正值，之下取负值。

P227 4.3.1

土中水的势能：

- 重力势 ψ_g
- 压力势 ψ_p
- 基质势 ψ_m
- 溶质势 ψ_o

压力势由所受到的压力所决定，某点的压力势可以用与该点连通的测压管中的水位确定。可分：

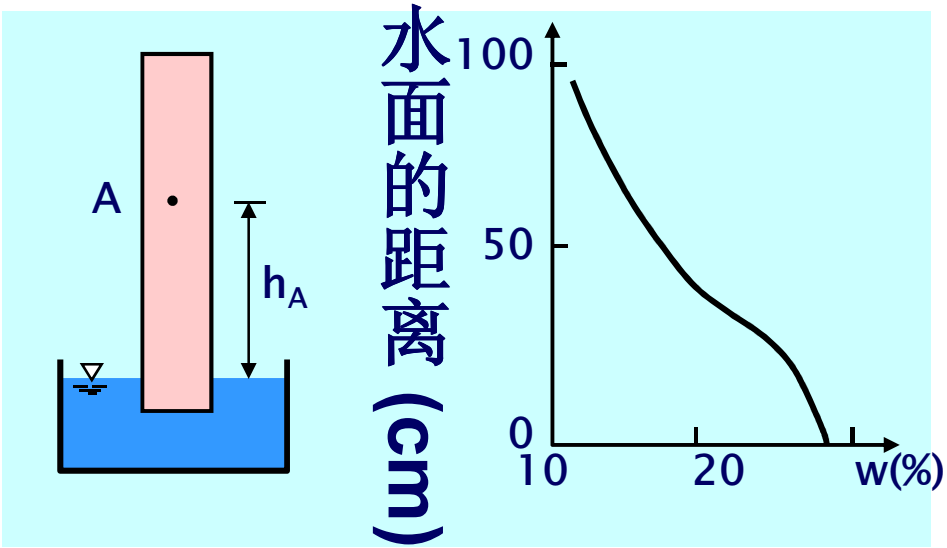


P227 4.3.1

土中水的势能：

- 重力势 ψ_g
- 压力势 ψ_p
- 基质势 ψ_m
- 溶质势 ψ_0

基质势又称为广义毛细势，由气水界面的收缩膜，即表面张力引起，它是一种广义的压力势（发生在非饱和区，压力值小于0）



$$\psi_A = \psi_g + \psi_m = \gamma_w h_A + \psi_m = 0$$

$$\Rightarrow \quad \psi_m = -\gamma_w h_A$$

P228 4.3.1

土中水的势能：

- 重力势 ψ_g
- 压力势 ψ_p
- 基质势 ψ_m
- 溶质势 ψ_o

溶质势是半透膜上渗透压力的反作用，总是负值，也叫作渗析吸力。它实际上是水中离子和分子渗析扩散的驱动势能，与一般水体的宏观流动有一定的区别。纯水中溶质势设为零，即ψ_o=0，溶解有离子的溶液中溶质势ψ_o<0 。离子浓度越大，溶解的离子价位越高， ψ_o的绝对值越高。

4.3.2 达西定律的物理意义

P231 4.3.2

■ 总水头：单位重量水体所具有的能量 $$h = z + \frac{u}{\gamma_w} + \frac{v^2}{2g}$$

✧ 位置水头Z：水体的位置势能（任选基准面）

✧ 压力水头u/γ_w：水体的压力势能（u孔隙水压力）

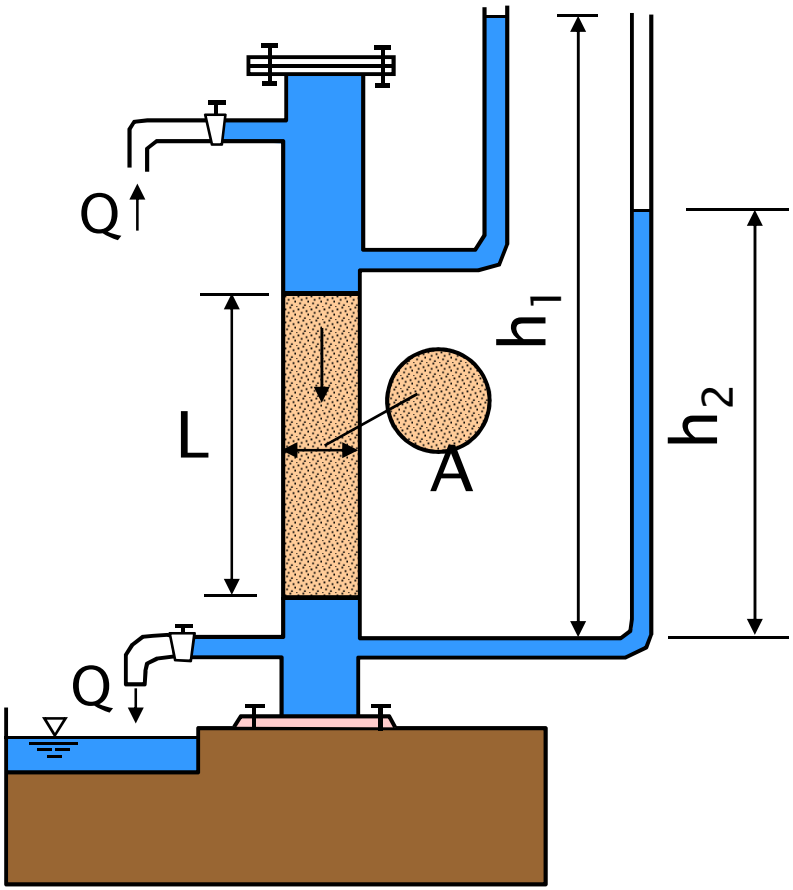
✧ 流速水头$V^2/(2g)$：水体的动能（对渗流多处于层流≈0）

■ 渗流的总水头：$$h = z + \frac{u}{\gamma_w}$$

➡ 也称测管水头，是渗流的总驱动能，渗流总是从水头高处流向水头低处

渗流问题的水头

P231 4.3.2



$$Q = \frac{k \cdot A \cdot (h_1 - h_2)}{L}$$

$$v = \frac{Q}{A} = k \cdot i$$

$$v_s = \frac{v}{n}$$

v：整个断面上的平均流速（m/s）

v_s：孔隙平均流速（m/s）

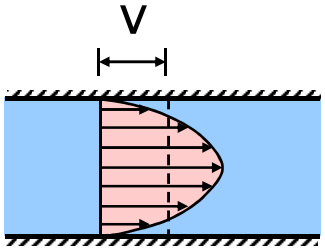
i：渗透破降

k ：渗透系数 （m/s）

达 西 定 律

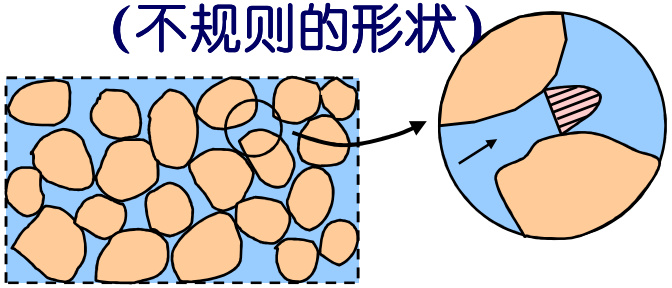
P231 4.3.2

圆管中或平板间的层流运动：

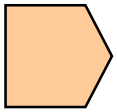


$$v = C_2 \cdot R_H^2 \cdot \frac{\gamma_w}{\eta} \cdot i$$

土体孔隙中的层流运动
（不规则的形状）



$$v = \frac{Q}{A} = k \cdot i$$



$$k = C_1 \cdot n \cdot R_H^2 \cdot \frac{\gamma_w}{\eta}$$

其中： C_1 ： 形状因素，反映土的层次结构、颗粒形状、排列方式和级配等

R_H ： 平均的水力半径，通常用土体的代表粒径来表示

$\frac{\gamma_w}{\eta}$ ： 流体的性质

渗透系数的物理意义

P232 4.3.2

☞1 土骨架对土渗透系数的影响

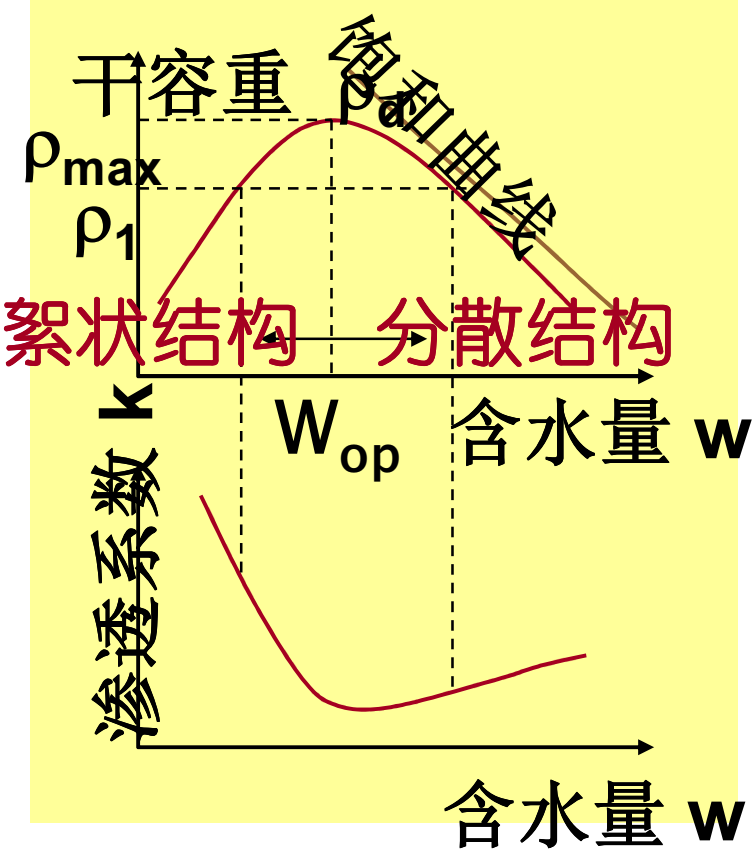
☞2 渗透流体的影响

4. 3. 3 影响土渗透系数的因素

P232 4.3.3

土颗粒骨架性质　　流体性质

- 组成：粘土：不同粘土矿物渗透系数相差极大，渗透性高岑石>伊里石>蒙脱石 ；片状颗粒会使渗透系数呈各向异性。砂土：颗粒大小、形状和级配
- 状态：随孔隙比e减小而减小
- 结构：对于粘性土的渗透系数影响很大。如果粘性土先形成粒组、团粒结构，则团粒间的大孔隙决定了渗透性，使其渗透性明显加大



渗透系数的影响因素

P232 4.3.3

土颗粒骨架性质

流体性质

- 渗透流体的压力
- 温度
- 流体内电解质的浓度
- 水中含有封闭小气泡时，会对其渗透性产生很大影响
- 在粘土中由于双电层的影响，电解质溶质的成分对其渗透性起重要作用
- 溶液中盐含量提高（或价位提高），渗透系数加大，这与粘土中结合水膜的厚度有关

渗透系数的影响因素

P232 4.3.3

☞1 粗粒料的渗透性

☞2 黏土的渗透性

4.3.4 达西定律的适用范围

P236 4.3.4

流体处于层流　　牛顿流体　　有效孔隙不变

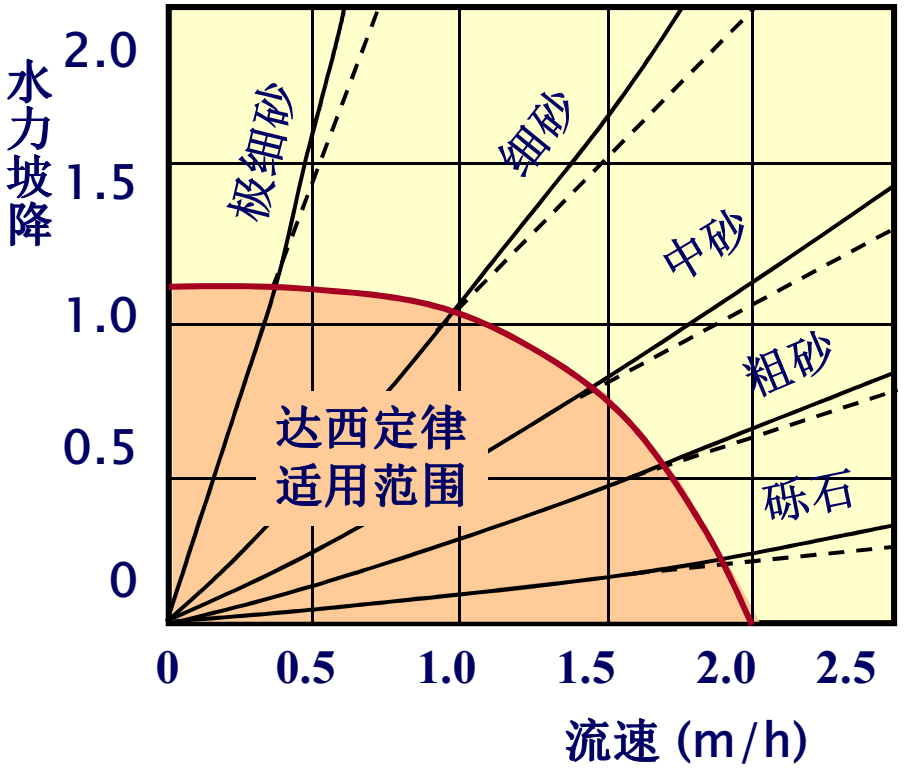
对粗粒土，孔隙中流速大时可呈紊流状态，渗流不再服从达西定律。可用雷诺数判断 ：

$$R_e = \frac{v \cdot d_{10}}{\eta}$$

$R_e < 5$时层流

$R_e > 200$时紊流

$200 > R_e > 5$时为过渡区

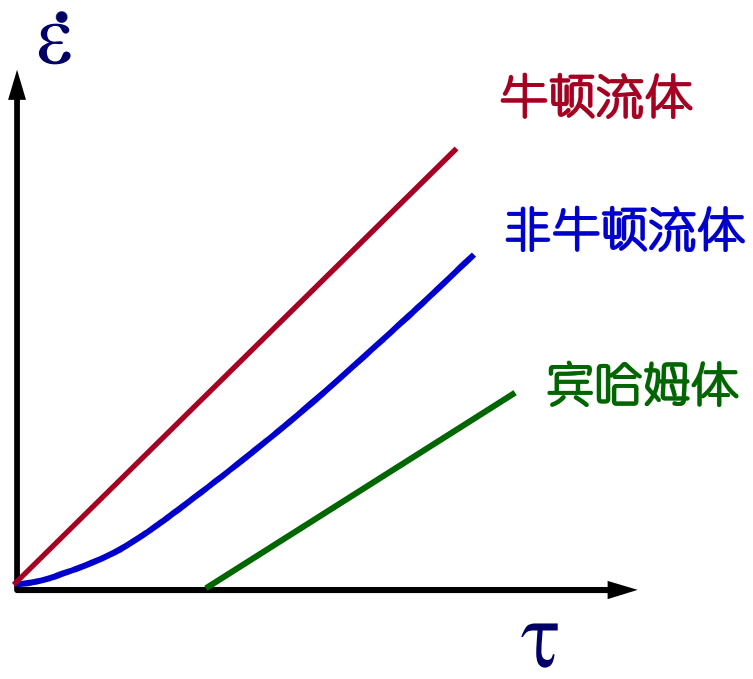


达西定律的适用条件

P236 4.3.4

流体处于层流　　牛顿流体　　有效孔隙不变

- 流体的流变方程符合牛顿定律 ： 剪应变速率和剪应力成正比
- 土中参加渗流的自由水的单位含量不变，土体的结构必须牢固，土体孔隙的大小和形状不变



达西定律的适用条件

☞1 空气流动

☞2 水的流动

4.3.5 非饱和土的渗透性

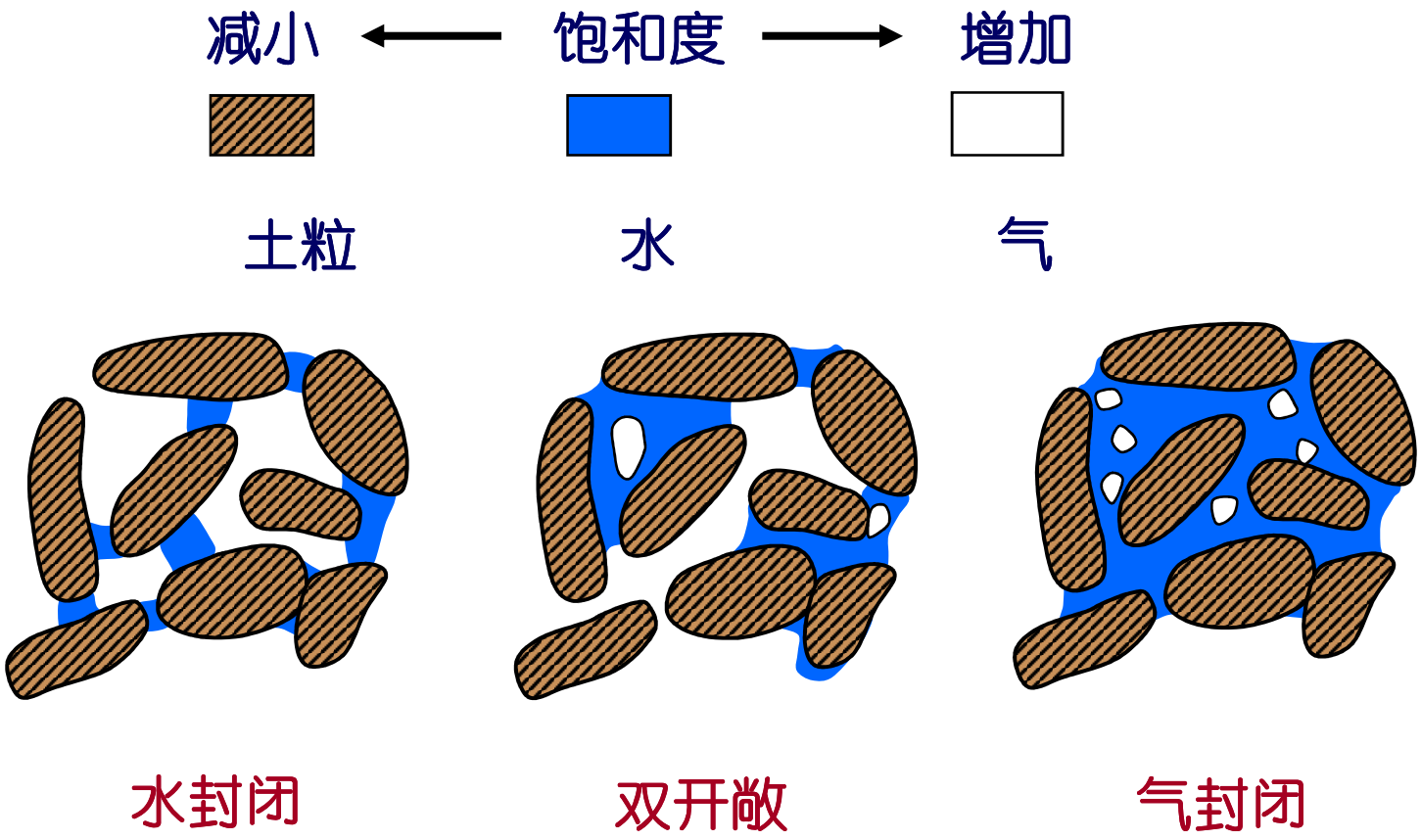
P237 4.3.5

§4.5 非饱和土水的形态和基质吸力 - 吸力土中水及形态

土中水
- 液态
  - 结合水
  - 毛细水
  - 重力水
- 固态
- 气态

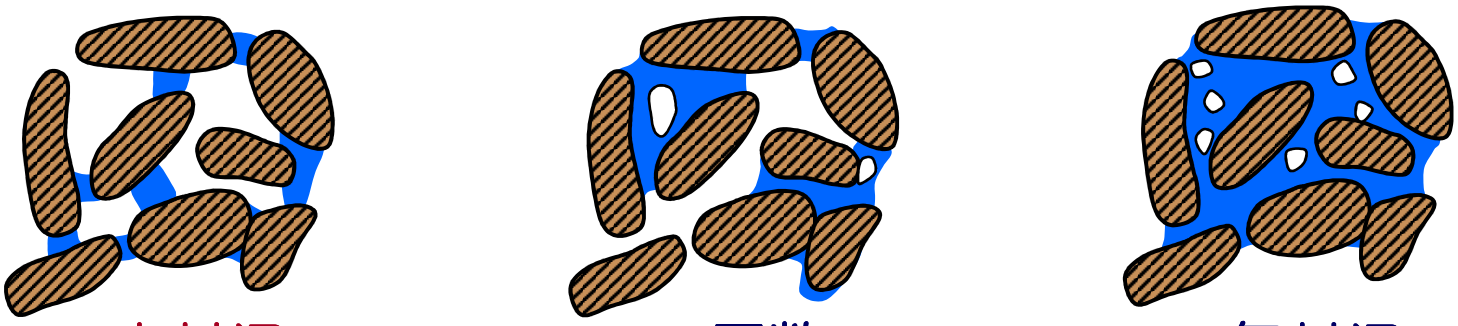
不同形态的水对于土特别是粘土和粉土的物理力学性质有重要影响

P237 4.3.5



土中水气形态

P237 4.3.5

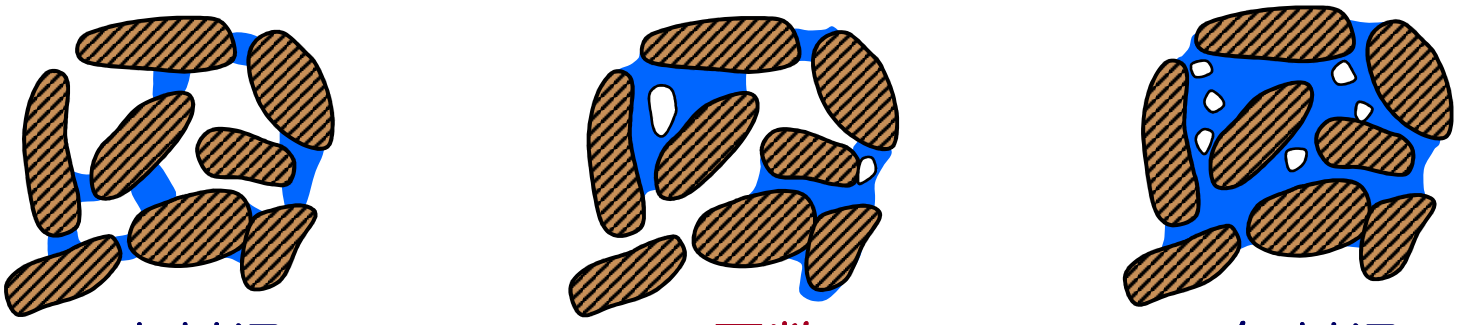


水封闭　　双开敞　　气封闭

当土中含水量很小时，孔隙水主要以水蒸汽和结合水状态存在，或者吸附在土颗粒局部和表面，被气体所隔离封闭，可不考虑水的流动，称为水封闭状态。

土中水气形态

P237 4.3.5



水封闭　　双开敞　　气封闭

当气和水都连通，均可能发生流动，称为双开敞体系。相应饱和度对于粘土约为50%－90%；对于砂土30%－80%，这种情况是研究非饱和土渗透性的主要课题。一般需分别考虑空气的流动和水的流动。

土中水气形态

P237 4.3.5

土的饱和度比较高时（>85%~90%），土的孔隙主要被水所占据。气体呈气泡状被水所包围，可随水一起流动，称为气封闭状态。这种混和的流体是可压缩的，在较高压力势下，气泡可能压缩和溶解，使孔隙水饱和度进一步提高。一般可按饱和土计算渗透与固结问题。

土中水气形态

P237 4.3.5

第四章 土中水及渗流计算

4.1 导言

4.2 土中水的形态及其对土性的影响

4.3 土的渗透性

4.4 二维渗流与流网

4.5 饱和土渗流数值计算的有限元方法

4.6 有关渗流的一些工程问题

- 势函数及流函数
- 流网的特性及画法
- 流网的应用及讨论

二维渗流与流网

P241 4.4.2

■ 流速势或势函数：

$$\phi = -kH = -k\left(\frac{p}{\gamma_w} + z\right)$$

则有：

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = grad\phi$$

- 流速矢量v是标量函数ϕ的梯度，这种流动称为有势流动，这个标量函数称为势函数或流速势
- 满足达西定律的渗流问题是一个势流问题

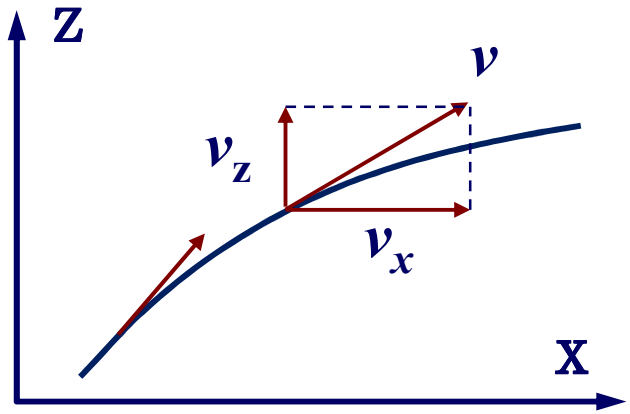
■ 势函数的特性：

1）等势面是等水头面

2）两条等势面的势值差同其水头差成正比

势 函 数

■ 流线及方程：流线是流场中的曲线，其上各点的流速矢量都和该曲线相切



$$\frac{dz}{dx}=\frac{v_z}{v_x}$$ 或：$-v_z\mathrm{d}x+v_x\mathrm{d}z=0$

■ 流函数：$-v_z\mathrm{d}x+v_x\mathrm{d}z$? $\mathrm{d}\psi=\frac{\partial\psi}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial\psi}{\partial z}\mathrm{d}z$

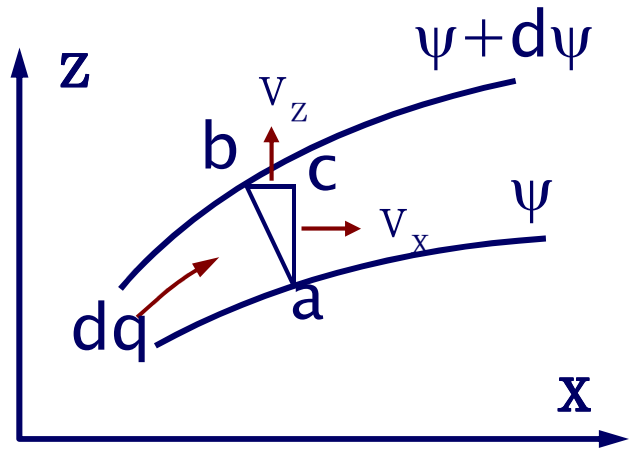
☞ 充要条件：$\frac{\partial v_x}{\partial x}=\frac{\partial(-v_z)}{\partial z}$ 渗流连续性方程！！

存在函数ψ，称为流函数，且有：$\frac{\partial\psi}{\partial x}=-v_z$；$\frac{\partial\psi}{\partial z}=v_x$

流 函 数

- 性质一：流线互不相交，在同一条流线上，流函数的值为一常数

$$v_x dz - v_z dx = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial z} dz = d\psi = 0$$



- 性质二：两条流线流函数的差值等于其间通过的流量

a和b为两流线间的过水断面，a(x, z)， b(x−dx, z+dz)

$$dq = v_x \cdot ac + v_z \cdot cb = v_x \cdot dz - v_z \cdot dx = \frac{\partial \psi}{\partial z} dz - (-\frac{\partial \psi}{\partial x}) dx = d\psi$$

流函数的性质

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

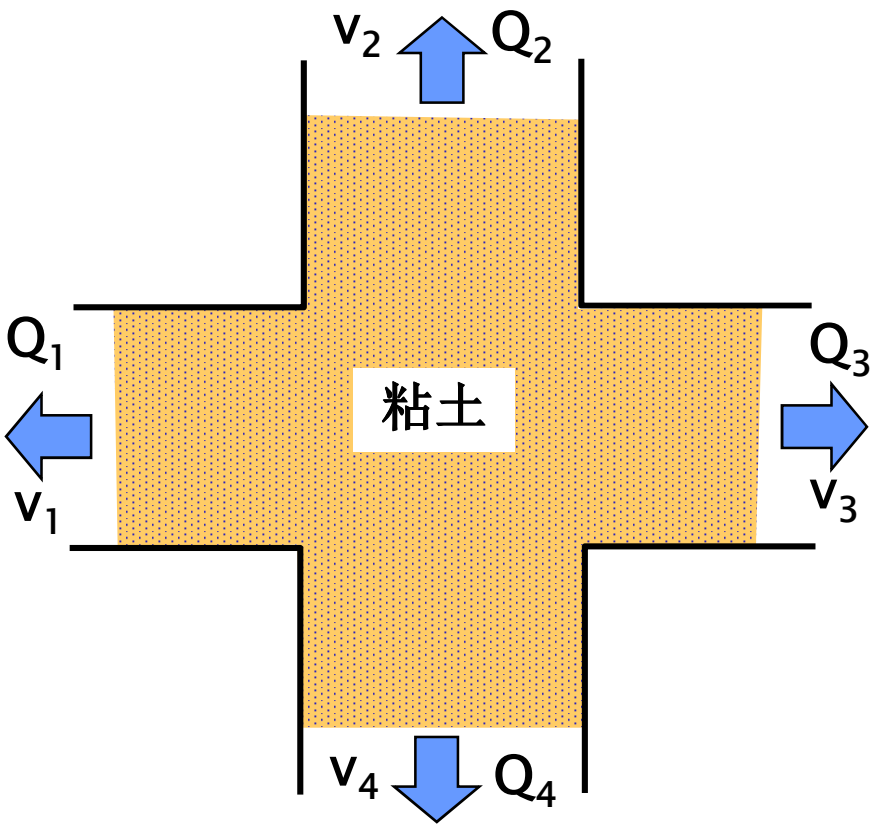
$$v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

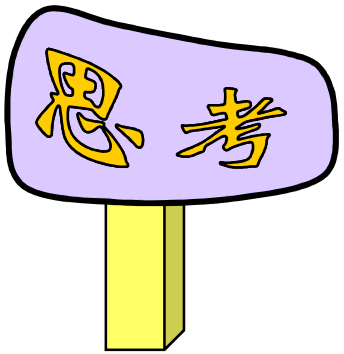
1. 势函数和流函数均满足拉普拉斯方程
2. 势函数和流函数正交，一点两线的斜率互成负倒数
3. 势函数和流函数是互为共轭的调和函数，两者均完备地描述了同一个渗流场
4. 当对调边界条件时，势函数和流函数两组曲线可互换

势函数与流函数



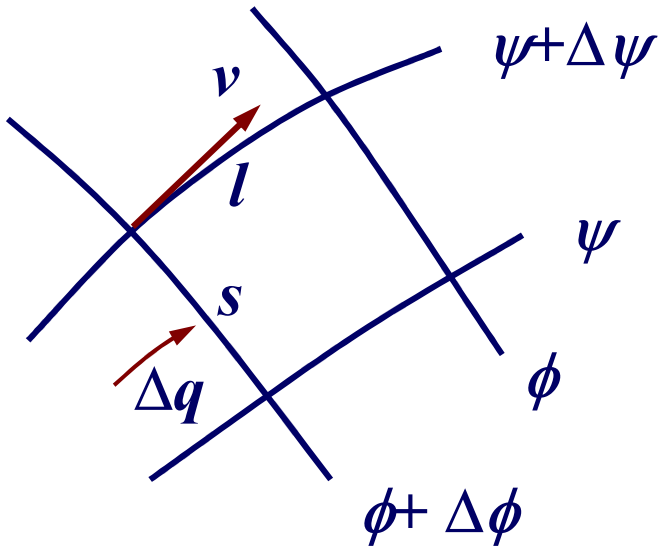
对由图所示的由均质各向同性粘土充填的岩石（不透水）裂隙，需要计算其交叉处的流速分布。已知各裂隙中的渗透流量如图所示，分别以水头为基本未知量和流函数为基本量写出具体的边界条件。（假定裂隙入口距交叉处已有足够距离）

流速分布计算



- 在流场中，流线和等势线（等水头线）组成的网格称为流网

  - 流线和等势线正交
  - 绘制流网时，如使相邻流线的$\Delta\psi$和相邻等势线的$\Delta\phi$保持不变，则流网中每一个网格的边长比均为常数
  - 特别的如取$\Delta\psi=\Delta\phi$，则每一网格均为曲边正方形

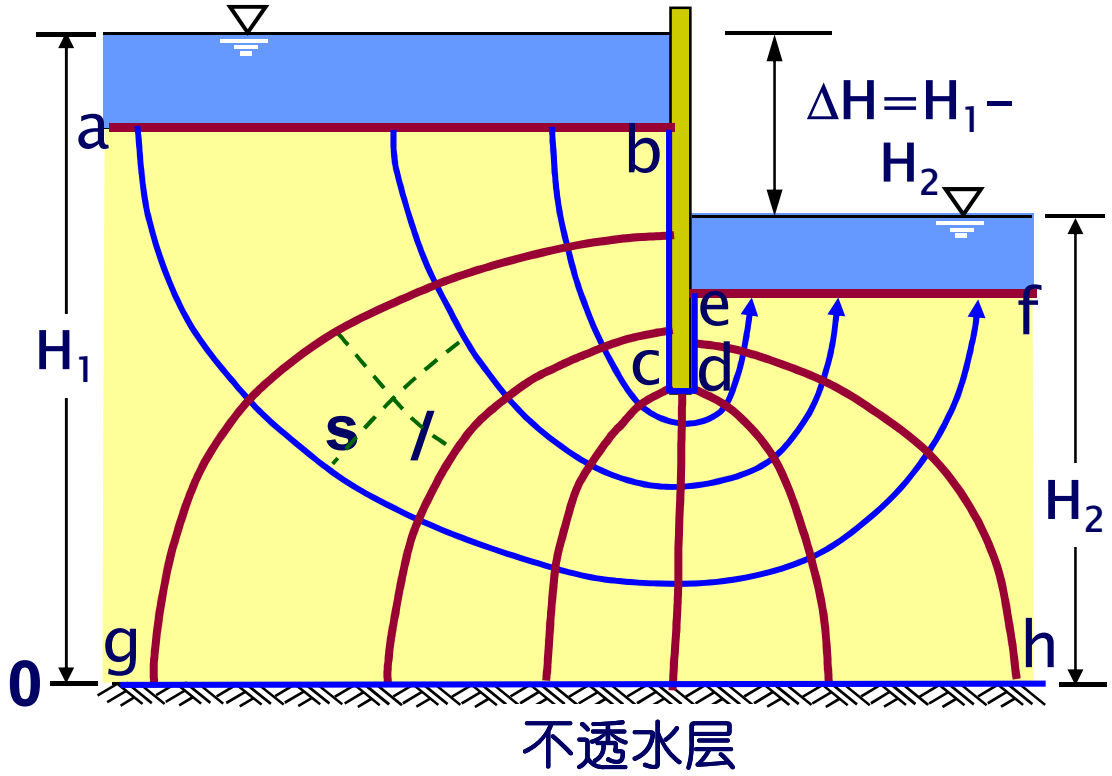


$$\frac{\Delta\phi}{\Delta\psi}=\frac{-k\dfrac{\Delta h}{l}l}{\Delta q}=\frac{v\cdot l}{v\cdot s}=\frac{l}{s}$$

流网及其特性

P241 4.4.2

1. 确定边界条件：边界流线和首尾等势线
2. 研究水流的方向：流线的走向
3. 大致判断网格疏密分布
4. 初步绘制流网的雏形：正交性、曲边正方形
5. 反复修改和检查

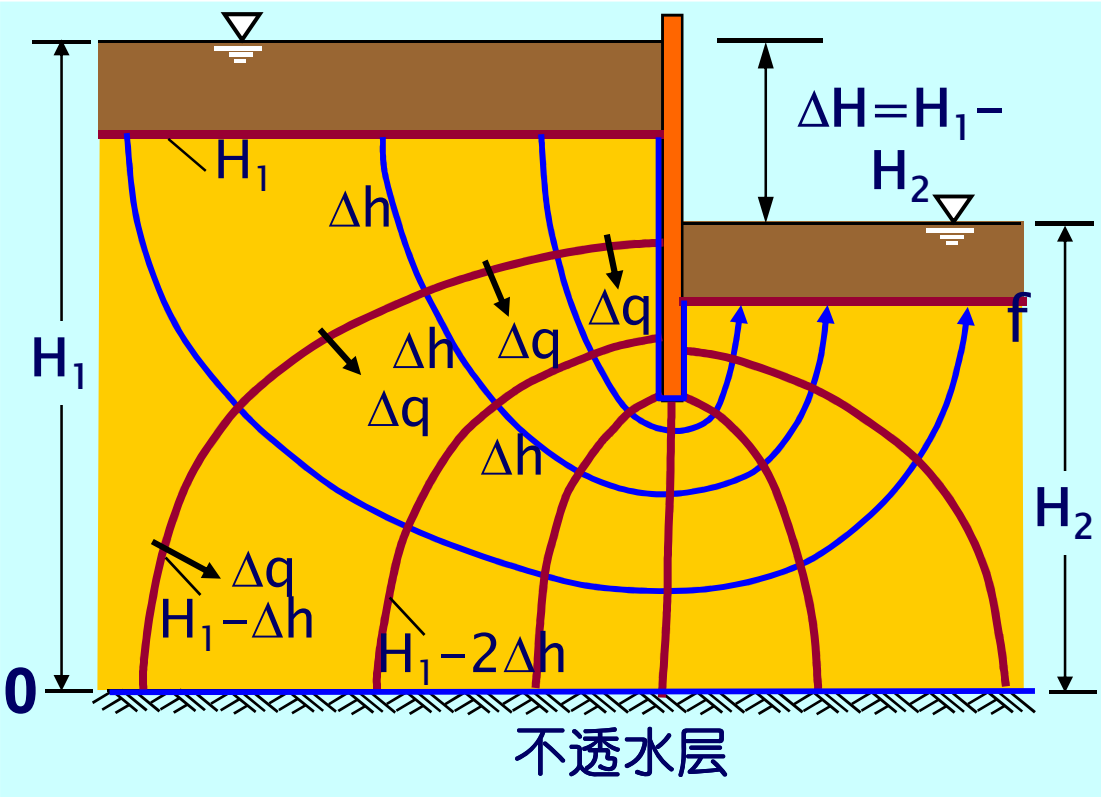


要点：边界条件、正交性、曲边正方形、多练习

流网的画法

- 测管水头 h
- 水力坡降 $i = \Delta h / l$
- 确定孔压 $(h - h_z) \times \gamma_w$
- 确定流速 $v = k \cdot i$
- 确定流量

$$\Delta q = k \frac{\Delta h}{l_i} \cdot s_i = k \cdot \Delta h$$



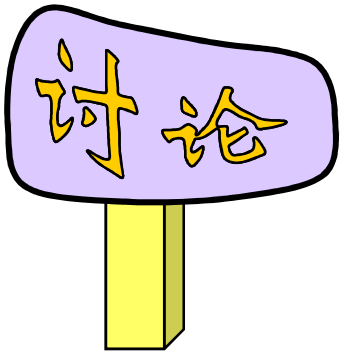
$$q = M \cdot \Delta q = M \cdot k \cdot \Delta h$$

流道数

流网的应用

绘制流网

- 满足边界条件
- 流线和等势线正交
- 流网中每一网格的边长比为常数，通常取为1

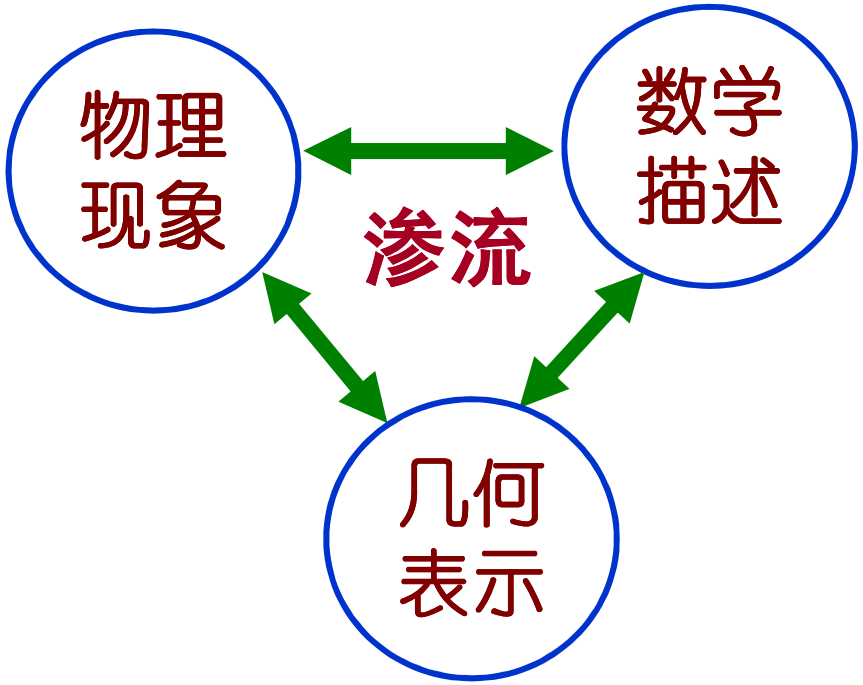


所得流网为何为渗流问题的解？

流网及渗流问题的解

- 测管水头
- 流速

流速为测管水头的梯度方向



- 势函数
- 流函数

均满足拉氏方程

- 等势线
- 流线

等势线和流线正交

流网及渗流问题的解

数学描述

- 势函数

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0$$

- 流函数

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=0$$

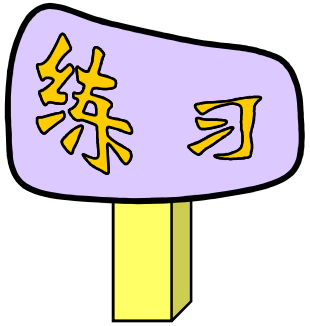
画等值线，使 $\Delta\phi$和$\Delta\psi$为常数

画流网，为两函数的解

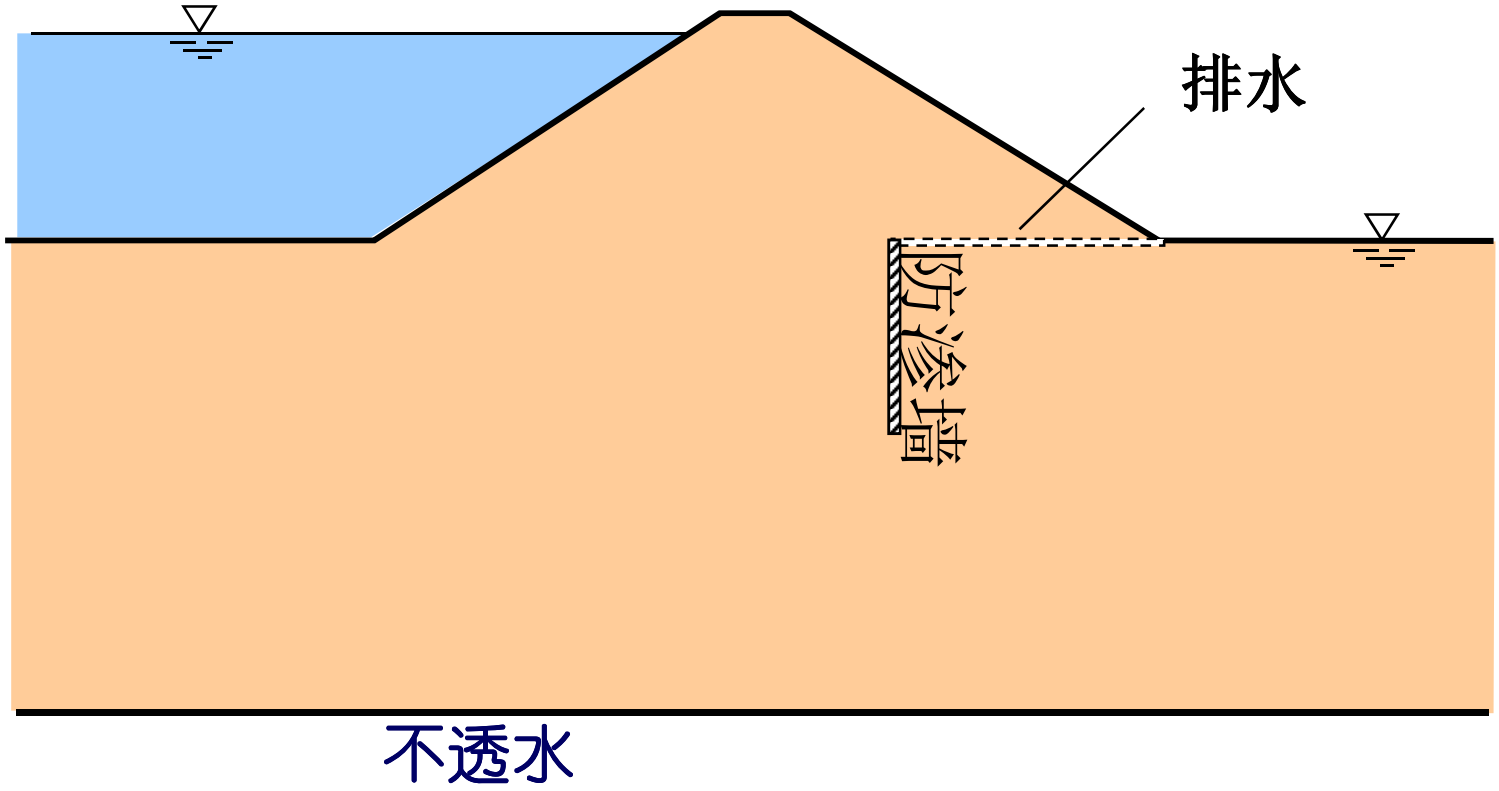
几何描述

- 流线和等势线正交
- 流网中每一网格的边长比为常数，通常取为1

流网及渗流问题的解



试绘出图示的均质土堤的流网图，假定：土堤堤身和堤基的渗透系数相等，防渗墙不透水，排水充分发生作用。



第四章 土中水及渗流计算

4.1 概述

4.2 土中水的形态及其对土性的影响

4.3 土的渗透性

4.4 二维渗流与流网

4.5 饱和土渗流数值计算的有限元方法

4.6 有关渗流的一些工程问题

P248 4.5

- 1 广义达西定律
- 2 饱和稳定渗流的基本微分方程
- 3 饱和非稳定渗流的基本微分方程

渗流的基本微分方程

P248 4.5.1

■ 水力坡降：渗流场中一点水力坡降在坐标方向的分量为

$$i_x = -\frac{\partial H}{\partial x} \qquad i_y = -\frac{\partial H}{\partial y} \qquad i_z = -\frac{\partial H}{\partial z}$$

☞ 式中负号表示水力坡降的正值对应测管水头降低的方向

☞ 上式表明，象渗透流速一样，渗流场中每一点的水力坡降是一个具有方向的矢量，其大小等于该点水头分布函数h的梯度，但方向相反

广义达西定律（1）

P249 P237 式4-41

- 一维达西定律：

$$v = k \cdot \frac{\Delta H}{\Delta L} = k \cdot i$$

- 三维广义达西定律：

$$v_x = k_{xx} \cdot i_x + k_{xy} \cdot i_y + k_{xz} \cdot i_z$$

$$v_y = k_{yx} \cdot i_x + k_{yy} \cdot i_y + k_{yz} \cdot i_z$$

$$v_z = k_{zx} \cdot i_x + k_{zy} \cdot i_y + k_{zz} \cdot i_z$$

$$\{v\} = [k] \cdot \{i\}$$

广义达西定律（1）

P 249式4-65

P237 式4-41

矩阵形式： $\{v\} = [k] \cdot \{i\}$

式中：

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\{v\} = [v_x \quad v_y \quad v_z]^T$$

$$\{i\} = [i_x \quad i_y \quad i_z]^T$$

- [k]为渗透系数矩阵，其坐标转换规则满足张量的转换规则，因而也称渗透系数张量
- 对于三维问题，有9个分量，由于对称性，独立的分量共6个
- 对应$k_{xy}= k_{xz}= k_{yz}=0$的方向称为渗透主轴方向

广义达西定律（2）

P249 4.5.1

矩阵形式：

$$\{v\} = [k] \cdot \{i\}$$

式中：

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\{v\} = [v_x \quad v_y \quad v_z]^T$$

$$\{i\} = [i_x \quad i_y \quad i_z]^T$$

{v}为由其三个速度分量组成的向量

对各向同性材料，其方向同水力坡降方向一致

对于各向异性材料，其方向同水力坡降方向不一致

广义达西定律（3）

P249 4.5.1

矩阵形式：

$$\{v\} = [k] \cdot \{i\}$$

式中：

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} & k_{xz} \\ k_{yx} & k_{yy} & k_{yz} \\ k_{zx} & k_{zy} & k_{zz} \end{bmatrix}$$

$$\{v\} = [v_x \quad v_y \quad v_z]^T$$

$$\{i\} = [i_x \quad i_y \quad i_z]^T$$

{i}为由其三个水力坡降分量组成的向量

对各向同性材料，其方向同流速方向一致

对于各向异性材料，其方向同流速方向不一致

广义达西定律（4）

P249 4.5.1

- 各向同性介质

$$v_x = k \cdot i_x$$
$$v_y = k \cdot i_y$$
$$v_z = k \cdot i_z$$

$$[k] = \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

- 各向异性介质，三个坐标轴向为渗透主轴

$$v_x = k_x \cdot i_x$$
$$v_y = k_y \cdot i_y$$
$$v_z = k_z \cdot i_z$$

$$[k] = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix}$$

广义达西定律 – 特例

P249 4.5.1

- 1 广义达西定律
- 2 饱和稳定渗流的基本微分方程
- 3 饱和非稳定渗流的基本微分方程

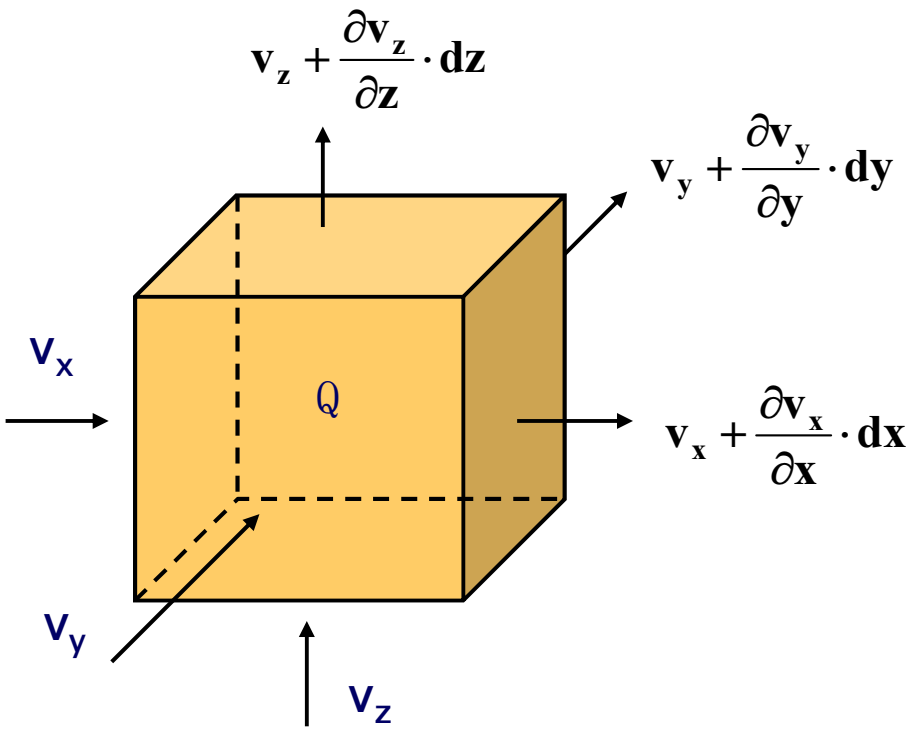
渗流的基本微分方程

P249 4.5.1

- 稳定渗流的连续性方程
- 稳定渗流的运动方程
- 稳定渗流的边界条件

稳定渗流的数学描述

P249 4.5.1



单位时间内流出、流入单元的水量差

x向： $\frac{\partial v_x}{\partial x} \cdot dx \cdot dy \cdot dz$

y向： $\frac{\partial v_y}{\partial y} \cdot dx \cdot dy \cdot dz$

z向： $\frac{\partial v_z}{\partial z} \cdot dx \cdot dy \cdot dz$

内源： $Q \cdot dx \cdot dy \cdot dz$

不可压缩、稳定渗流 ⇒

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = Q$$

稳定渗流的连续性方程

P249 4.5.1

☞ 将广义达西定律代入连续方程可得各向异性土体不可压缩、稳定渗流的运动方程 ：

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}: \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(k_{xx}\cdot\frac{\partial H}{\partial x}+k_{xy}\cdot\frac{\partial H}{\partial y}+k_{xz}\cdot\frac{\partial H}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial y}: \quad +\frac{\partial}{\partial y}\left(k_{yx}\cdot\frac{\partial H}{\partial x}+k_{yy}\cdot\frac{\partial H}{\partial y}+k_{yz}\cdot\frac{\partial H}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial z}: \quad +\frac{\partial}{\partial z}\left(k_{zx}\cdot\frac{\partial H}{\partial x}+k_{zy}\cdot\frac{\partial H}{\partial y}+k_{zz}\cdot\frac{\partial H}{\partial z}\right)$$

$$+Q=0$$

稳定渗流的运动方程

P249 4.5.1

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_{xx}\cdot\frac{\partial H}{\partial x}+k_{xy}\cdot\frac{\partial H}{\partial y}+k_{xz}\cdot\frac{\partial H}{\partial z}\right)$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_{yx}\cdot\frac{\partial H}{\partial x}+k_{yy}\cdot\frac{\partial H}{\partial y}+k_{yz}\cdot\frac{\partial H}{\partial z}\right)$$
$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_{zx}\cdot\frac{\partial H}{\partial x}+k_{zy}\cdot\frac{\partial H}{\partial y}+k_{zz}\cdot\frac{\partial H}{\partial z}\right)+Q=0$$

稳定渗流的运动方程

P250 式4-69

☞ 各向异性介质，三个坐标轴向为渗透主轴：

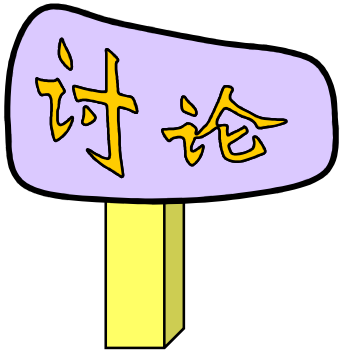
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_{xx}\cdot\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_{yy}\cdot\frac{\partial H}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_{zz}\cdot\frac{\partial H}{\partial z}\right)=0$$

☞ 均质各向同性介质

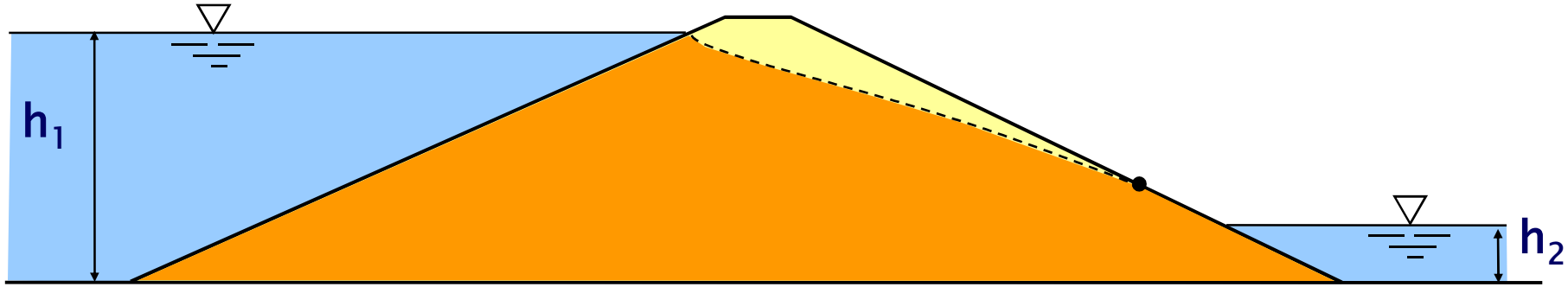
$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}=0$$

水头的分布同渗透系数的大小无关。

渗流运动方程的特例



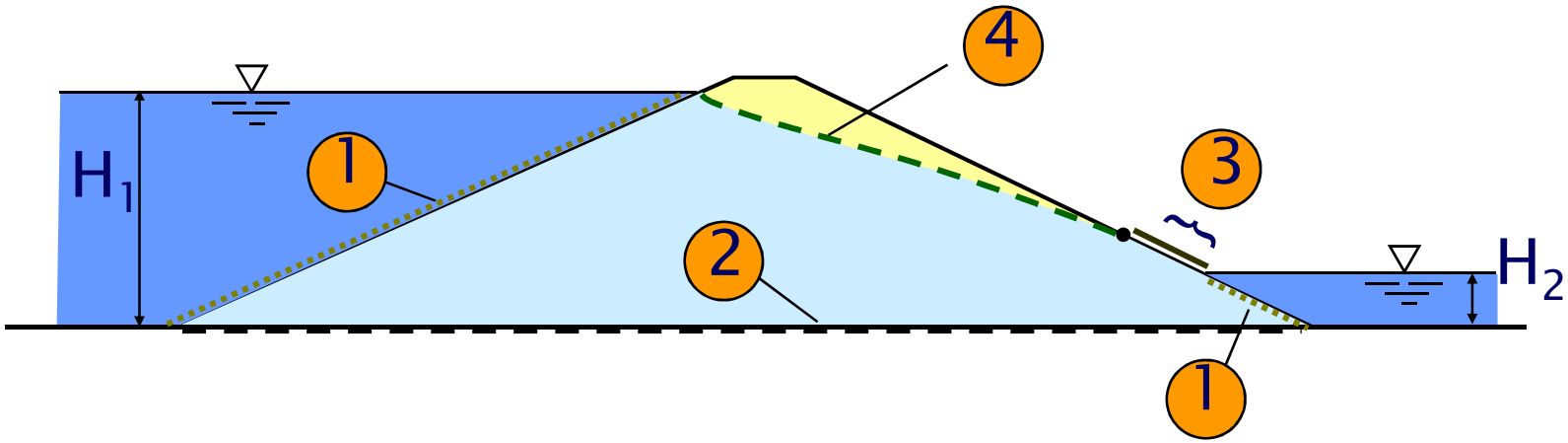
☞ 试给出图示土坝渗流问题完备的边界条件



不透水层

渗流的边界条件

P250 图4-44



① 水头边界条件　　在边界Ω_1上给定水头

② 流速边界条件　　在边界Ω_2上给定法向流速

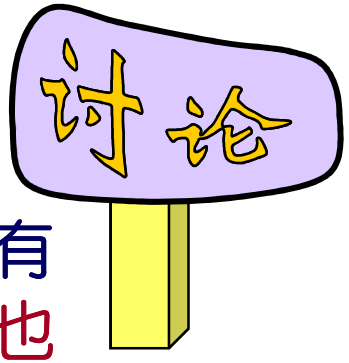
③ 渗出面　　在边界Ω_3上$H=z$，$v_n>0$

④ 自由水面*　　在边界Ω_4上$H=z$，$v_n=0$

渗流的边界条件

P250

1）渗出面上的边界条件：

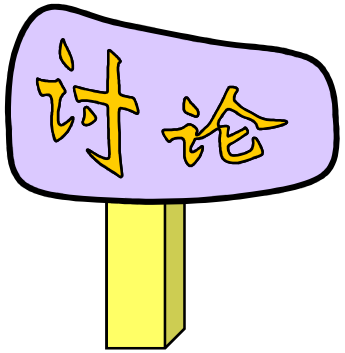


“（4）浸润线及下游出流线上压力水头为0，只有位置水头，如图4-44中AE和ED。其中，浸润线AE也是流线”

渗流的边界条件

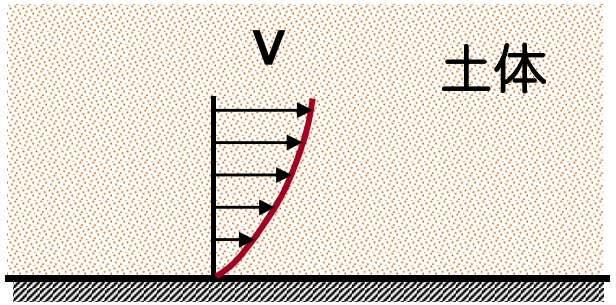
P250

2）不透水层上的流速：



有意见认为，在不透水边界上，由于存在水流的固壁效应，因此对渗流问题其流速边界条件为总流速为零，也即不仅$v_n=0$，切向流速也应为零

☞ 请说出你对该段话的意见



不透水边界

渗流的边界条件

P250

- 1 广义达西定律
- 2 饱和稳定渗流的基本微分方程
- 3 饱和非稳定渗流的基本微分方程

渗流的基本微分方程

P251 4.5.1

- 非稳定渗流的连续性方程
- 非稳定渗流的运动方程
- 非稳定渗流的边界条件

非稳定渗流的数学描述

P251

- 同稳定渗流差异：水头H随时间t变化，单元内
  1）孔隙水压缩造成水的密度发生变化
  2）单元土颗粒及孔隙体积变化

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=S_s\frac{\partial H}{\partial t}+Q$$

式中，$S_s=\rho g(\alpha+n\beta)$

土颗粒的压缩性

水的压缩性

☞ S_s称为单位贮存量（量纲1/L），表示对单位体积的饱和土体，当下降1个单位水头时，由于土体压缩（$\rho g\alpha$）和水的膨胀（$\rho gn\beta$）等原因所释放出来的储存水量

非稳定渗流的连续性方程

P251

- 将广义达西定律代入连续方程可得各向异性土体非稳定渗流的运动方程 ：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_{xx}\cdot\frac{\partial H}{\partial x}+k_{xy}\cdot\frac{\partial H}{\partial y}+k_{xz}\cdot\frac{\partial H}{\partial z}\right)$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_{yx}\cdot\frac{\partial H}{\partial x}+k_{yy}\cdot\frac{\partial H}{\partial y}+k_{yz}\cdot\frac{\partial H}{\partial z}\right)$$
$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_{zx}\cdot\frac{\partial H}{\partial x}+k_{zy}\cdot\frac{\partial H}{\partial y}+k_{zz}\cdot\frac{\partial H}{\partial z}\right)$$
$$+S_s\frac{\partial H}{\partial t}+Q=0$$

非稳定渗流的运动方程

P252 式4-77

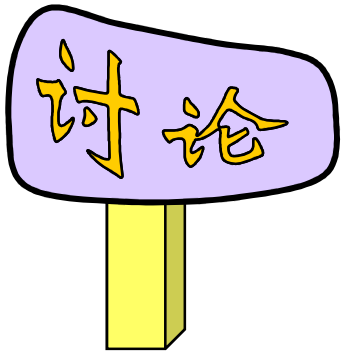
- 对饱和土体当不考虑土体和水的可压缩性时，$S_s=0$，非稳定渗流的运动方程为 ：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_{xx}\cdot\frac{\partial H}{\partial x}+k_{xy}\cdot\frac{\partial H}{\partial y}+k_{xz}\cdot\frac{\partial H}{\partial z}\right)$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_{yx}\cdot\frac{\partial H}{\partial x}+k_{yy}\cdot\frac{\partial H}{\partial y}+k_{yz}\cdot\frac{\partial H}{\partial z}\right)$$
$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_{zx}\cdot\frac{\partial H}{\partial x}+k_{zy}\cdot\frac{\partial H}{\partial y}+k_{zz}\cdot\frac{\partial H}{\partial z}\right)+Q=0$$

方程中不含时间项，同稳定渗流完全相同

非稳定渗流的运动方程

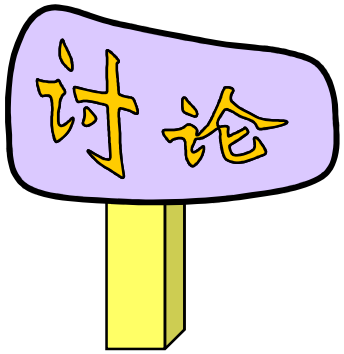
对饱和土体，当不考虑土体和水的可压缩性时，$S_s=0$，非稳定渗流的运动方程同稳定渗流完全相同。



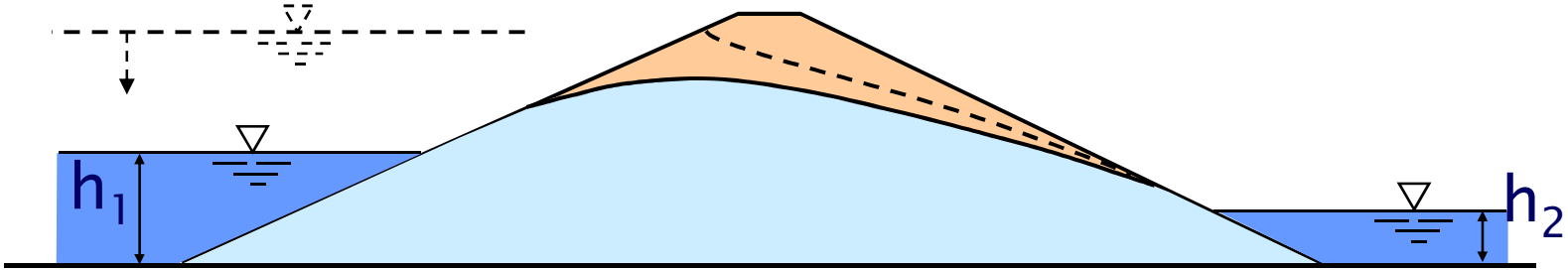
- 非稳定渗流控制方程中不包括时间项，是否与时间无关？
- 这是否意味着此时非稳定渗流同稳定渗流完全相同？

稳定渗流和非稳定渗流

P252 DEL

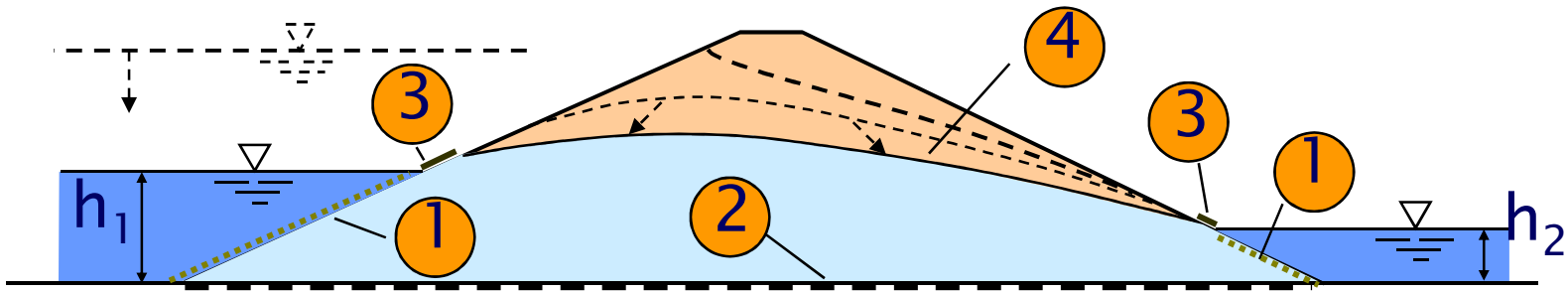


☞ 试给出图示土坝在发生水位下降后非稳定渗流问题的边界条件



非稳定渗流的边界条件

P252 图4-45



① 水头边界条件 Ω_1上给定水头

② 流速(流量)边界条件 Ω_2上给定法向流速(量)

③ 渗出面 Ω_3上$h=z$，$v_n>0$

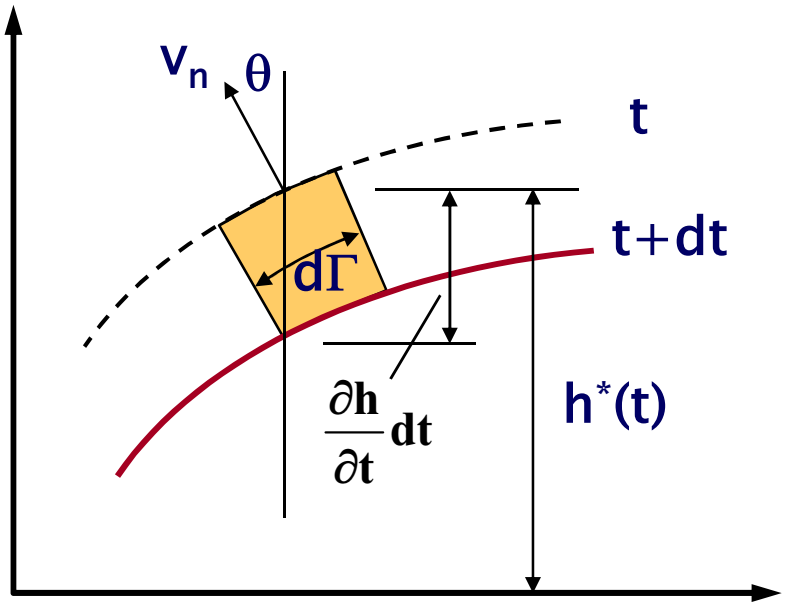
④ 自由水面* Ω_4上$h=z$，$v_n\neq0$

随时间运动的边界，同稳定渗流不同，自由水面不是流线，可作为流量边界条件处理。

非稳定渗流的边界条件

■ 自由水面的流量边界条件：

土工原理与计算（钱家欢、殷宗泽）



在dt时段内，相当在dΓ内补充的水量：

$$\mu \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \cdot dt \cdot \cos\theta \cdot d\Gamma$$

$$v_n = \mu \frac{\partial h}{\partial t} \cos\theta$$

其中，μ为给水度，指水位发生变化时，由单位土体所吸收或释放出的水量

非稳定渗流自由水面条件

P252 式4-79

■ 自由水面方程： Dynamics of fluids in porous media (Jacob Bear)

$$F(x,y,z,t) \equiv H(x,y,z,t) - z = 0$$

根据自由水面上质点流动速度和水面运动间的关系可得：

$$\frac{\partial H}{\partial t} - \frac{1}{n_e}\left[k_x\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + k_y\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2 + k_z\left(\frac{\partial H}{\partial z}\right)^2 - k_z\left(\frac{\partial H}{\partial z}\right)\right] = 0$$

其中，n_e称为有效孔隙率，指可被水充满和排出的土体的孔隙部分，同前述的给水度μ实质意义相同。

非稳定渗流自由水面条件

P252

- 渗流计算分析方法
- 饱和稳定渗流的有限元方程
- 饱和稳定渗流边界条件处理
- 饱和非稳定渗流有限元求解方法

4.5.2 饱和土稳定渗流的有限元计算方法 P253 4.5.3

- 水力学方法：土石坝工程中使用的方法，简便实用，用于I、II级坝和高坝的初设以及III、IV级坝的初设和技设阶段；
- 手画流网法：简便快捷，足够精度较好，可分析较复杂断面的渗流问题；
- 电比拟试验法：利用电流场来模拟渗流场，简便、直观，可以用于二维问题和三维问题；
- 数值解法：有限元法、有限差分、边界元等，下面详细介绍有限元法。

渗流分析的方法

■ 运动方程：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_{xx}\cdot\frac{\partial H}{\partial x}+k_{xy}\cdot\frac{\partial H}{\partial y}+k_{xz}\cdot\frac{\partial H}{\partial z}\right)$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_{yx}\cdot\frac{\partial H}{\partial x}+k_{yy}\cdot\frac{\partial H}{\partial y}+k_{yz}\cdot\frac{\partial H}{\partial z}\right)$$
$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_{zx}\cdot\frac{\partial H}{\partial x}+k_{zy}\cdot\frac{\partial H}{\partial y}+k_{zz}\cdot\frac{\partial H}{\partial z}\right)+Q=0$$

■ 边界条件：

① 水头边界条件　　在边界Ω_1上给定水头

② 流速边界条件　　在边界Ω_2上给定法向流速

③ 渗出面　　在边界Ω_3上$H=z$，$v_n>0$

④ 自由水面*　　在边界Ω_4上$H=z$，$v_n=0$

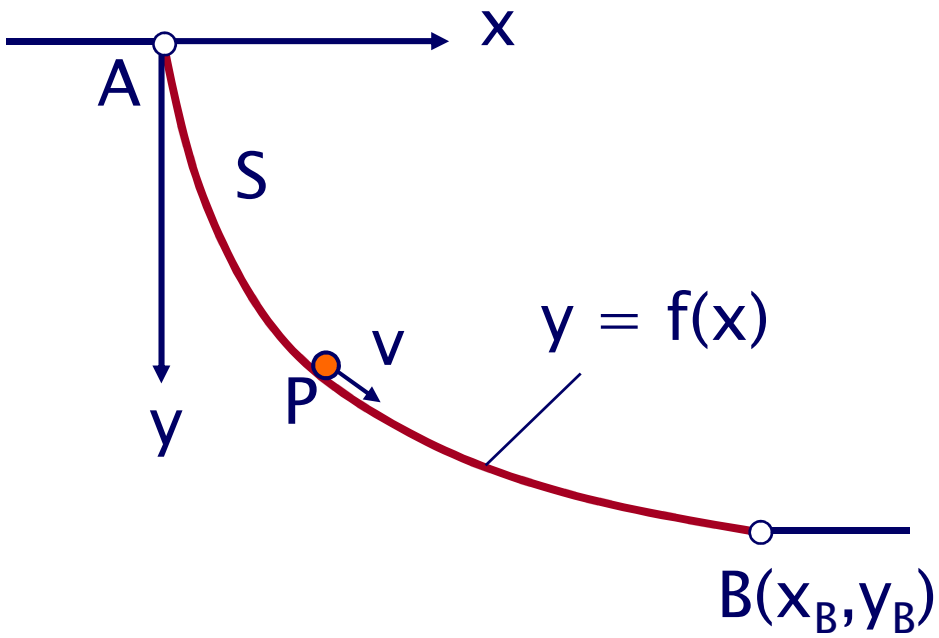
饱和稳定渗流问题描述

☞ 虚功原理： → 力学问题

☞ 变分原理：
- → 力学问题
  - → 最小位能原理
  - → 最小余能原理
- → 其它问题 → 微分方程的泛函

☞ 加权余量法：(Galerkin法) → 变分的泛函找不到或者根本不存在的情况

建立有限元方程的方法



从A到B所需的时间为：

$$T=\int_0^{x_B}\sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}\cdot dx$$

一般总能(欧拉方程)

求解一个泛函的极值 → 求解一个微分方程

求解一个微分方程 → 求解一个泛函的极值（许多情况）

泛函与变分 – 最速降线

☞ 由渗流基本方程和第2类边界条件确定的渗流场，等价于求下述泛函的极值问题：

$$I(H)=\iiint_R\left\{\frac{1}{2}\cdot\left[k_{xx}\cdot\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2+k_{yy}\cdot\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2+k_{zz}\cdot\left(\frac{\partial H}{\partial z}\right)^2\right.\right.$$
$$\left.+2\cdot k_{xy}\cdot\frac{\partial H}{\partial x}\cdot\frac{\partial H}{\partial y}+2\cdot k_{yz}\cdot\frac{\partial H}{\partial y}\cdot\frac{\partial H}{\partial z}+2\cdot k_{zx}\cdot\frac{\partial H}{\partial z}\cdot\frac{\partial H}{\partial x}\right]$$
$$\left.-Q\cdot H\right\}\cdot dx\cdot dy\cdot dz+\iint_{\Omega_2}v_n\cdot H\cdot ds$$

其中，函数H(x, y, z)在边界Ω_1上应满足第1类边界条件

渗流运动方程的泛函

P253 式4-80

- 在二维的情况下有：

$$
\begin{aligned}
I(H) = \iint_S \Bigg\{ \frac{1}{2} \cdot \Bigg[& k_{xx} \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 + k_{yy} \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)^2 \\
& + 2 \cdot k_{xy} \cdot \frac{\partial H}{\partial x} \cdot \frac{\partial H}{\partial y} \Bigg] - Q \cdot H \Bigg\} \cdot dx \cdot dy \\
& + \int_{\Gamma_2} v_n \cdot H \cdot d\Gamma
\end{aligned}
$$

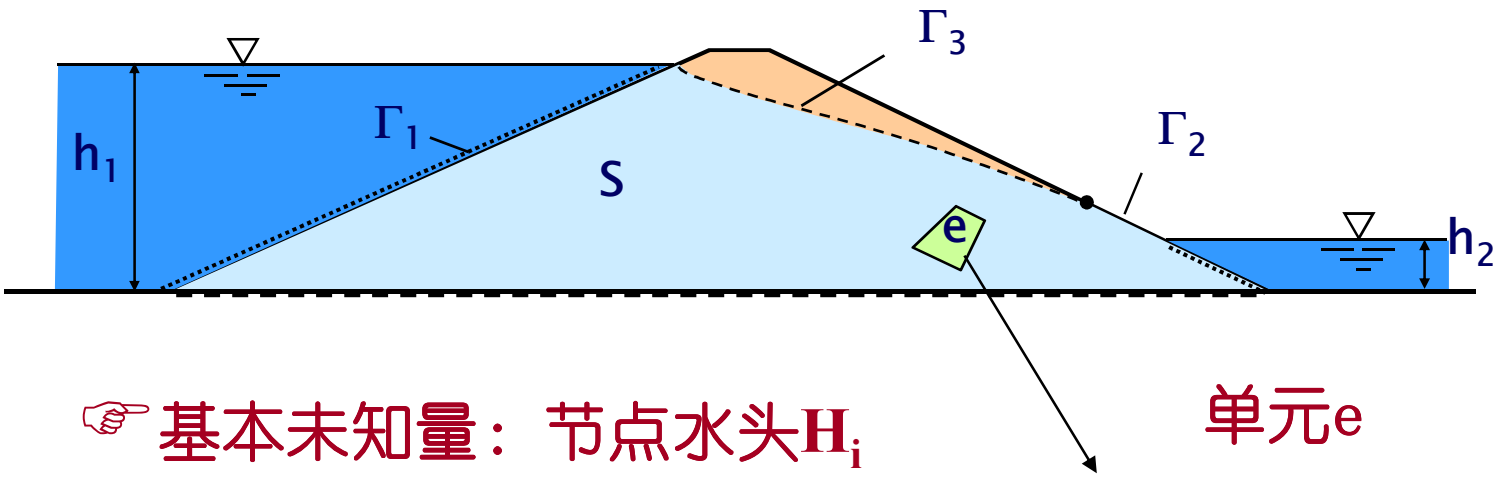
其中，函数H在边界Ω_1上应满足第1类边界条件

渗流运动方程的泛函

P253 4.5.2

- ☞ 离散计算域：划分为有限个单元
- ☞ 单元描述：结点水头、单元函数插值、导数
- ☞ 求单元的泛函值：将单元的泛函用结点水头来表示
- ☞ 泛函对单元求和：域的泛函值⇨ 域内结点水头的函数
- ☞ 泛函求极值：对每个节点水头的导数=0，得到以节点水头为未知量的方程组
- ☞ 边界条件处理
- ☞ 求解方程组

1 由变分原理建立有限元方程的步骤



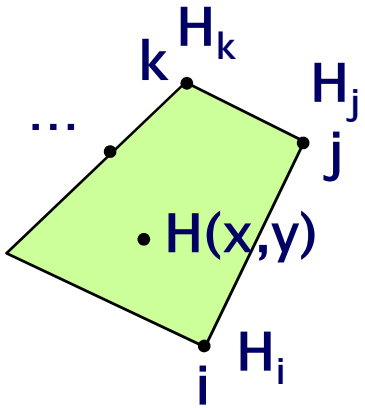
☞ 基本未知量：节点水头H_i

☞ 单元插值函数为：

$$H^e(x,y)=\begin{bmatrix}N_i & N_j & N_k & \cdots\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}H_i\\H_j\\H_k\\\vdots\end{Bmatrix}$$

$$=[N]\cdot\{H^e\}$$

单元e



渗流的有限元计算（1）

P253 4.5.2 式4-81

☞ 单元内的渗透坡降：

$$\begin{Bmatrix} i_x \\ i_y \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} \dfrac{\partial H^e}{\partial x} \\ \dfrac{\partial H^e}{\partial y} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x}\cdot H_i + \dfrac{\partial N_j}{\partial x}\cdot H_j \dfrac{\partial N_k}{\partial x}\cdot H_k + \cdots \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y}\cdot H_i + \dfrac{\partial N_j}{\partial y}\cdot H_j \dfrac{\partial N_k}{\partial y}\cdot H_k + \cdots \end{bmatrix}$$

$$= -[B]\cdot\{H^e\}$$

式中：

$$[B] = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_i}{\partial x} & \dfrac{\partial N_j}{\partial x} & \dfrac{\partial N_k}{\partial x} & \cdots \\ \dfrac{\partial N_i}{\partial y} & \dfrac{\partial N_j}{\partial y} & \dfrac{\partial N_k}{\partial z} & \cdots \end{bmatrix}$$

☞ 单元内的流速：

$$\{v\} = \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \end{Bmatrix} = -[k]\cdot[B]\cdot\{H^e\}$$

渗流的有限元计算（2）

P253 4.5.2 式4-82

☞ 单元e泛函的值为：

$$I^e(H)=\iint_e\left\{\frac{1}{2}\cdot\left[k_{xx}\cdot\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2+k_{yy}\cdot\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2+2\cdot k_{xy}\cdot\frac{\partial H}{\partial x}\cdot\frac{\partial H}{\partial y}\right]-Q\cdot H\right\}\cdot dx\cdot dy+\int_{\Gamma_2}v_n\cdot H\cdot d\Gamma$$

☞ 整个域S上的泛函之和为： $I(H)=\sum_{e=1}^{N}I^e(H)$ （N为单元总数）

泛函I为域内节点上水头的多元函数，所以求泛函I极值的变分问题就归结为了求多元函数的极值问题

☞ 多元函数I取极值的条件为： $\frac{\partial I}{\partial H_l}=0 \quad (l=1,2,\cdots,M)$

（M为节点总数）

渗流的有限元计算（3）

P253 4.5.2 式4-87

$$I^e(H)=\iint_e\left\{\frac{1}{2}\cdot\left[k_{xx}\cdot\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2+k_{yy}\cdot\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2+2\cdot k_{xy}\cdot\frac{\partial H}{\partial x}\cdot\frac{\partial H}{\partial y}\right]-Q\cdot H\right\}\cdot dx\cdot dy+\int_{\Gamma_2}v_n\cdot H\cdot d\Gamma$$

$$\frac{\partial I}{\partial H_l}=\sum_{e=1}^{N}\frac{\partial I^e}{\partial H_l}$$

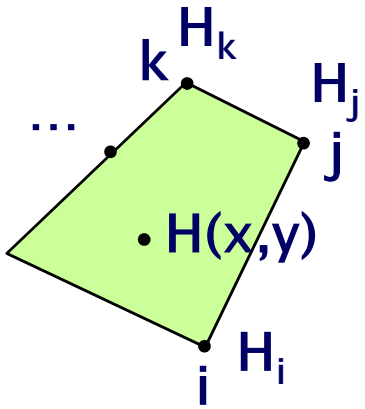
$$=\sum_{e=1}^{N}\left\{\iint_e\left\{\frac{1}{2}\cdot\left[k_{xx}\cdot 2\cdot\frac{\partial H^e}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial H_l}\left(\frac{\partial H^e}{\partial x}\right)+k_{yy}\cdot 2\cdot\frac{\partial H^e}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial H_l}\left(\frac{\partial H^e}{\partial y}\right)\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.+2\cdot k_{xy}\cdot\left(\frac{\partial H^e}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial H_l}\left(\frac{\partial H^e}{\partial y}\right)+\frac{\partial H^e}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial H_l}\left(\frac{\partial H^e}{\partial x}\right)\right)\right]-Q\cdot\frac{\partial H^e}{\partial H_l}\right\}\cdot dx\cdot dy$$

$$\left.+\int_{\Gamma_2}v_n\cdot\frac{\partial H^e}{\partial H_l}\cdot d\Gamma\right\}=0 \qquad (l=1,2,3\cdots,M)$$

渗流的有限元计算（4）

P253 4.5.2 式4-88



$$H^e(x,y) = \begin{bmatrix} N_i & N_j & N_k & \cdots \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} H_i \\ H_j \\ H_k \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

$$= N_i \cdot H_i + N_j \cdot H_j + \cdots$$

☞ 由单元的插值函数可得：

$$\frac{\partial H^e}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot H_i + \frac{\partial N_j}{\partial x} \cdot H_j + \frac{\partial N_k}{\partial x} \cdot H_k + \cdots$$

$$\frac{\partial}{\partial H_i}\left(\frac{\partial H^e}{\partial x}\right) = \frac{\partial N_i}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial H_j}\left(\frac{\partial H^e}{\partial x}\right) = \frac{\partial N_j}{\partial x} \quad \cdots \quad , \quad \frac{\partial H^e}{\partial H_l} = N_l$$

渗流的有限元计算（5）

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial I^e}{\partial H_i} = \iint_e \Bigg[& k_{xx} \cdot \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot H_i + \frac{\partial N_j}{\partial x} \cdot H_j + \frac{\partial N_m}{\partial x} \cdot H_m + \cdots \right) \cdot \frac{\partial N_i}{\partial x} \\
& + k_{yy} \cdot \left(\frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot H_i + \frac{\partial N_j}{\partial y} \cdot H_j + \frac{\partial N_m}{\partial y} \cdot H_m + \cdots \right) \cdot \frac{\partial N_i}{\partial y} \\
& + k_{xy} \cdot \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot H_i + \frac{\partial N_j}{\partial x} \cdot H_j + \frac{\partial N_m}{\partial x} \cdot H_m + \cdots \right) \cdot \frac{\partial N_i}{\partial y} \\
& + k_{xy} \cdot \left(\frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot H_i + \frac{\partial N_j}{\partial y} \cdot H_j + \frac{\partial N_m}{\partial y} \cdot H_m + \cdots \right) \cdot \frac{\partial N_i}{\partial x} \\
& - Q \cdot N_i \Bigg] \cdot dx \cdot dy \\
& + \int_{\Gamma_2} v_n \cdot N_i \cdot d\Gamma \Bigg\}
\end{aligned}
$$

渗流的有限元计算（6）

P253 4.5.2 式4-88

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial I^e}{\partial H_i} \\ \dfrac{\partial I^e}{\partial H_j} \\ \vdots \\ \\ \end{Bmatrix} = \frac{\partial I^e}{\partial \{H\}^e} = [C]^e \cdot \{H\}^e - \{Q\}^e$$

式中：

$$[C]^e = \iint_e [B]^T \cdot [k] \cdot [B] \cdot dx \cdot dy$$

$$\{Q\}^e = \iint_e [N]^T \cdot Q \cdot dx \cdot dy - \int_e [N]^T \cdot v_n \cdot d\Gamma$$

☞ 将式对单元进行集成叠加得：

$$\sum_{e=1}^{N} [C]^e \cdot \{H\}^e - \sum_{e=1}^{N} \{Q\}^e = 0 \quad \Rightarrow \quad [C] \cdot \{H\} = \{Q\}$$

渗流的有限元计算（7）

P255 4.5.2 式4-95

渗流问题

运动方程+边界条件

泛函的极值

插值函数 $H=f(H_i)$

泛函对节点水头求导

方程组 ➡ 节点水头

建立渗流有限元方程的思路

P255-256

	应力变形分析	渗流分析
基本变量及单元插值	$\begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = [N]\cdot\{\delta^e\}$ 位移	$H^e(x,y,z) = [N]\cdot\{H^e\}$ 水头
导数	$\{\varepsilon_{ij}\} = [B]\cdot\{\delta^e\}$ 应变 $\{\sigma_{ij}\} = [D]\cdot[B]\cdot\{\delta^e\}$ 应力	$\{i\} = -[B]\cdot\{H^e\}$ 水力梯度 $\{v\} = -[K]\cdot[B]\cdot\{H^e\}$ 流速
方程右边项	$\{F\}$ 节点力	$\{Q\}$ 节点流量
有限元方程的物理意义	节点力平衡	节点流量平衡

渗流与应力变形有限元的比较

P255 表4-3

■ 流速边界：

$$I(H)=\iint_S\left\{\frac{1}{2}\cdot\left[k_{xx}\cdot\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2+k_{yy}\cdot\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2+2\cdot k_{xy}\cdot\frac{\partial H}{\partial x}\cdot\frac{\partial H}{\partial y}\right]-Q\cdot H\right\}\cdot dx\cdot dy+\int_{\Gamma_2}v_n\cdot H\cdot d\Gamma$$

☞ 在有限元方程中考虑了流速边界。对不透水边界（v_n=0），对方程不产生影响，故在计算中不必特别给出

2 流速边界条件的处理

P256 2

■ 水头边界：对如下4节点的有限元方程，设$H_2=H_0$为已知边界条件

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{Bmatrix}$$

第一个方程变为：$c_{11} \cdot H_1 + c_{12} \cdot H_2 + c_{13} \cdot H_3 + c_{14} \cdot H_4 = Q_1$

$c_{12} \cdot H_0$

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{13} & c_{14} \\ c_{31} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} H_1 \\ H_3 \\ H_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1 - c_{12} \cdot H_0 \\ Q_3 - c_{32} \cdot H_0 \\ Q_4 - c_{42} \cdot H_0 \end{Bmatrix}$$

☞ 在实际的有限元程序中，有限元方程直接集成

水头边界条件的处理

P256 式4-96

对如下4节点的有限元方程，设H_2和H_3为已知边界条件

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \\ Q'_2 \\ Q'_3 \\ \\ \end{matrix}$$

为了使结点具有所要求的水头值，需在结点上补充或抽出水量，在求解之前未知

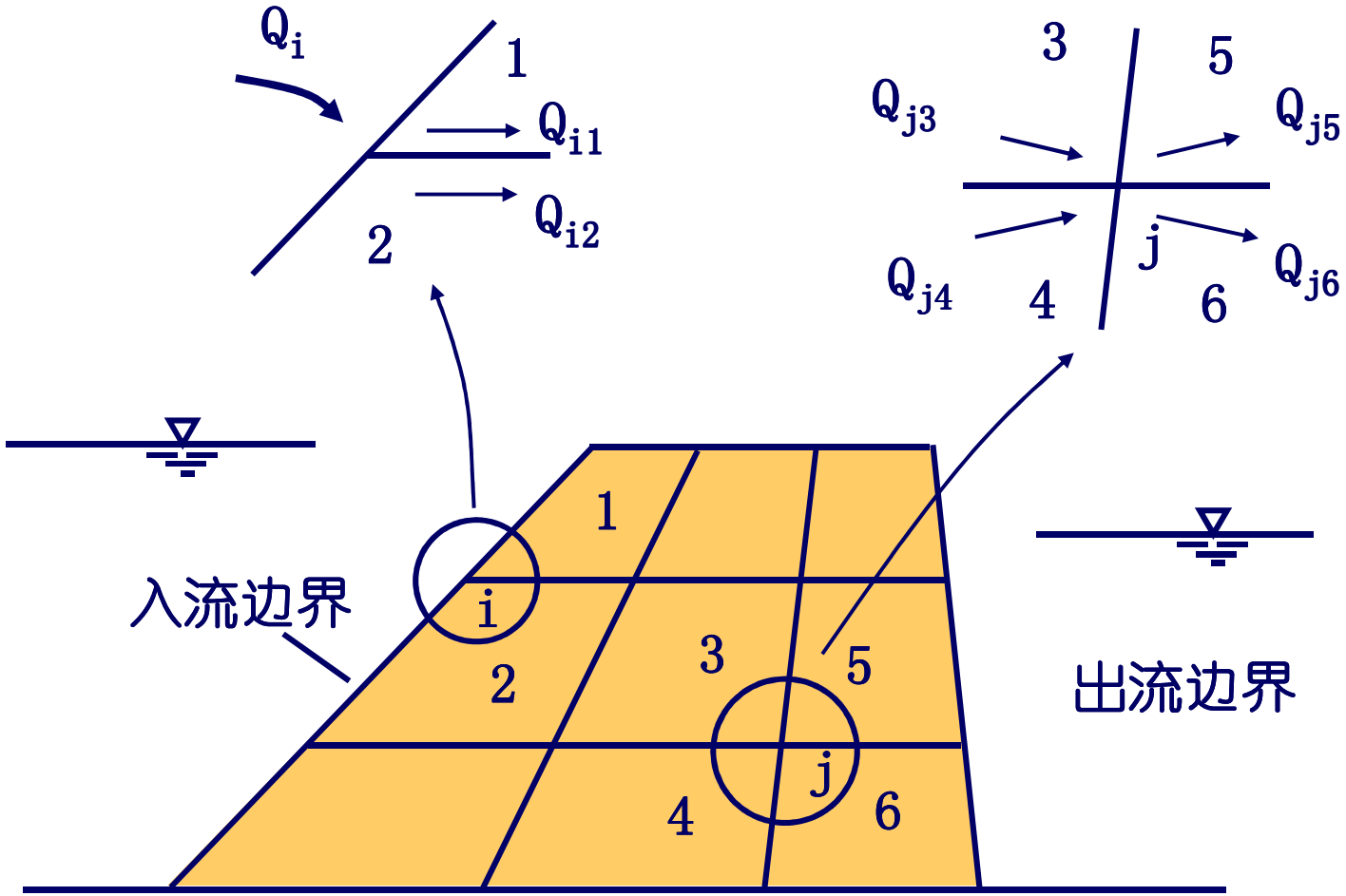
$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{14} \\ c_{41} & c_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} H_1 \\ H_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1 - c_{12} \cdot H_2 - c_{13} \cdot H_3 \\ Q_4 - c_{42} \cdot H_2 - c_{43} \cdot H_3 \end{Bmatrix}$$

求解方程组，得到其余结点的水头值

$$\begin{bmatrix} c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ H_3 \\ H_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q'_2 \\ Q'_3 \end{Bmatrix}$$

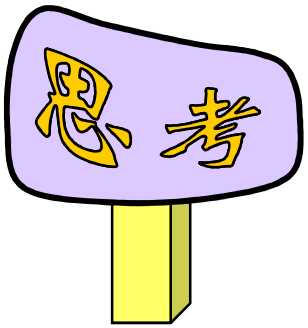
回代到已知水头结点的方程中，可得到所需的结点流量

水头边界条件处理的物理意义

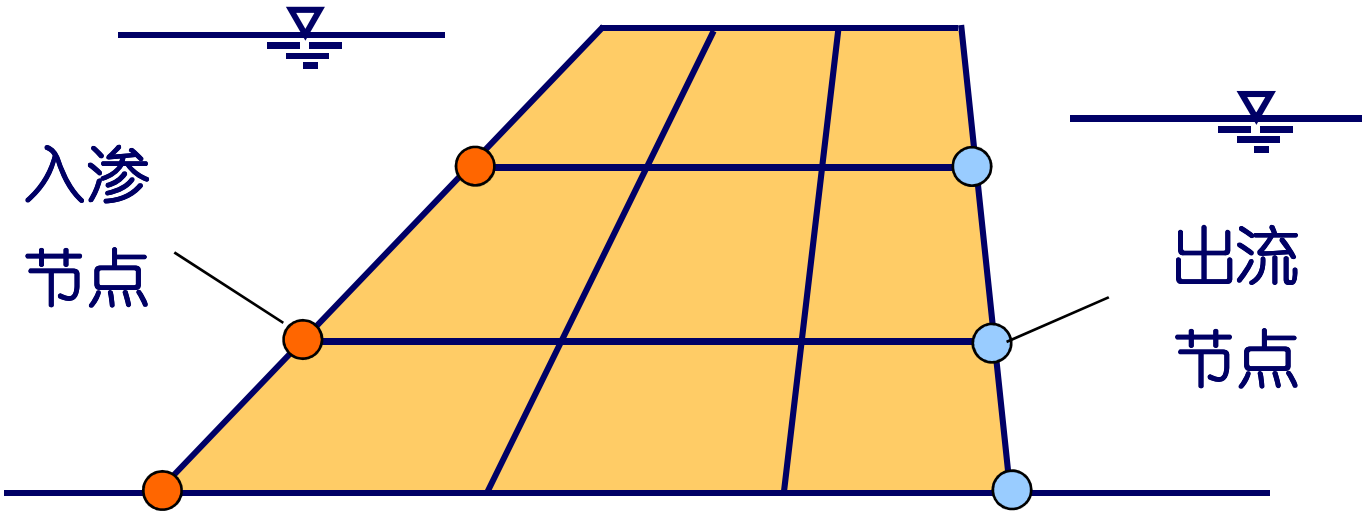


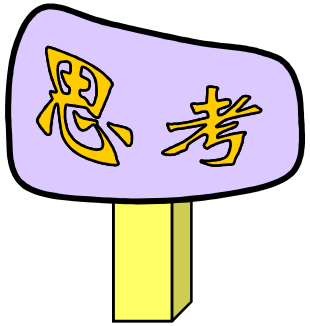
渗流有限元方程的物理意义

P257 图4-46

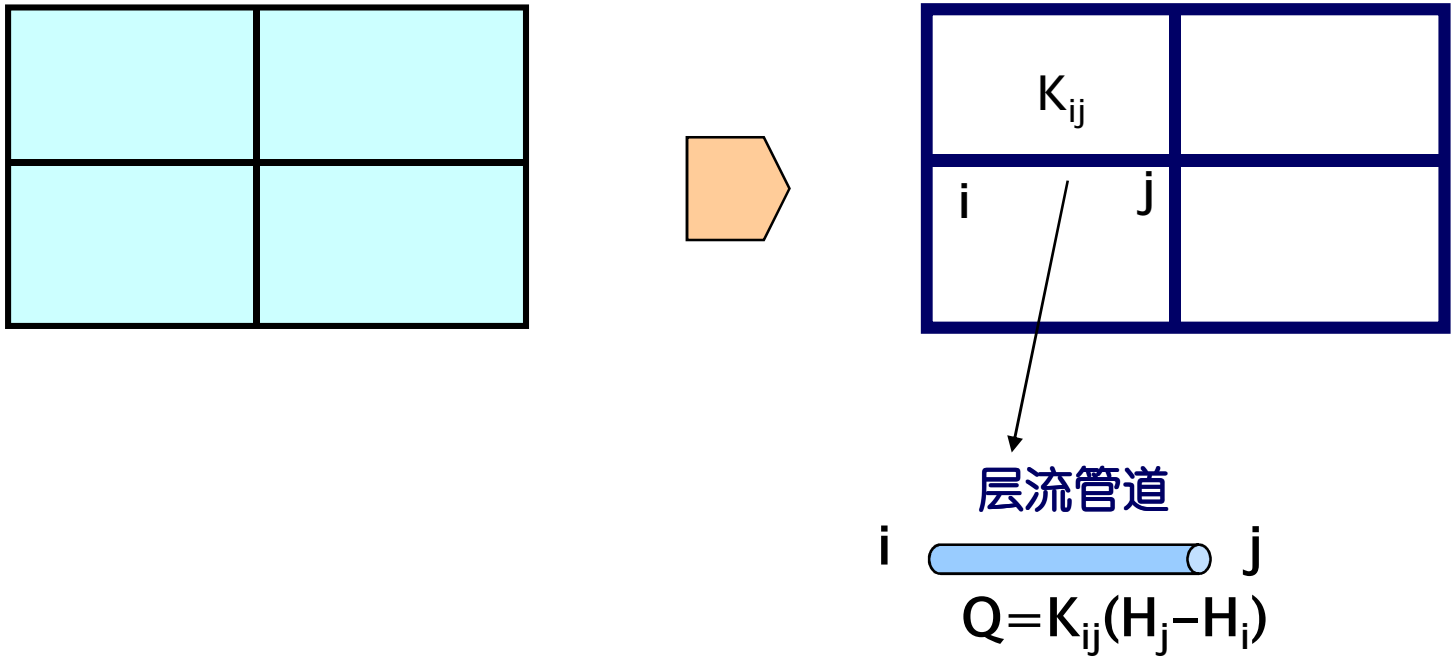


☞ 如何计算透过整个渗透断面的渗漏量？





☞ 渗流有限元的物理意义是将整个断面渗流等价为节点相连的层流管道的渗流问题



- 条件：$\begin{cases} H = z \\ v_n = 0 \end{cases}$

- 自由水面的位置无法事先确定，需在计算中用迭代计算确定，常采用的办法有：
  - 网格修正法　　（最原始的办法）
  - 单元传导矩阵修正法　（Bathe, 1979）

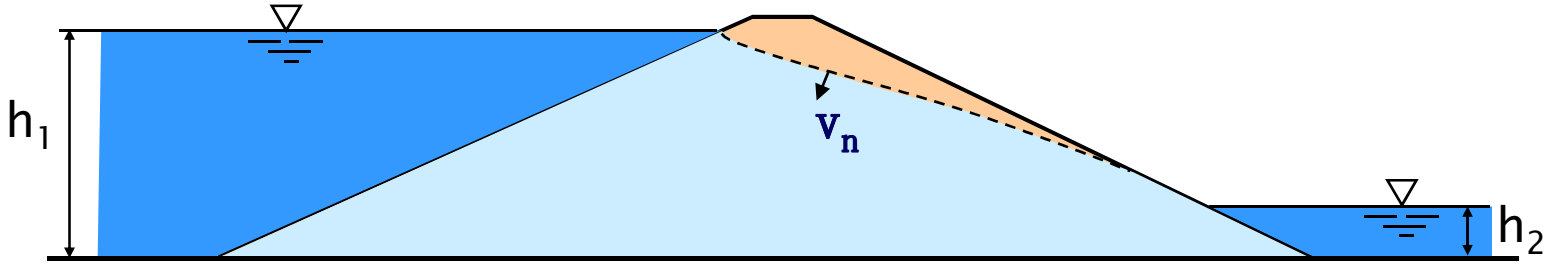
改变渗透系数：$\begin{cases} k = k & (H \geq z) \\ k = \dfrac{k}{1000} & (H < z) \end{cases}$

- 剩余流量法　（Desai, 1976）
- 初始流量法　（Gell, Wittke, 1984）

} 见后介绍

自由水面的处理（1）

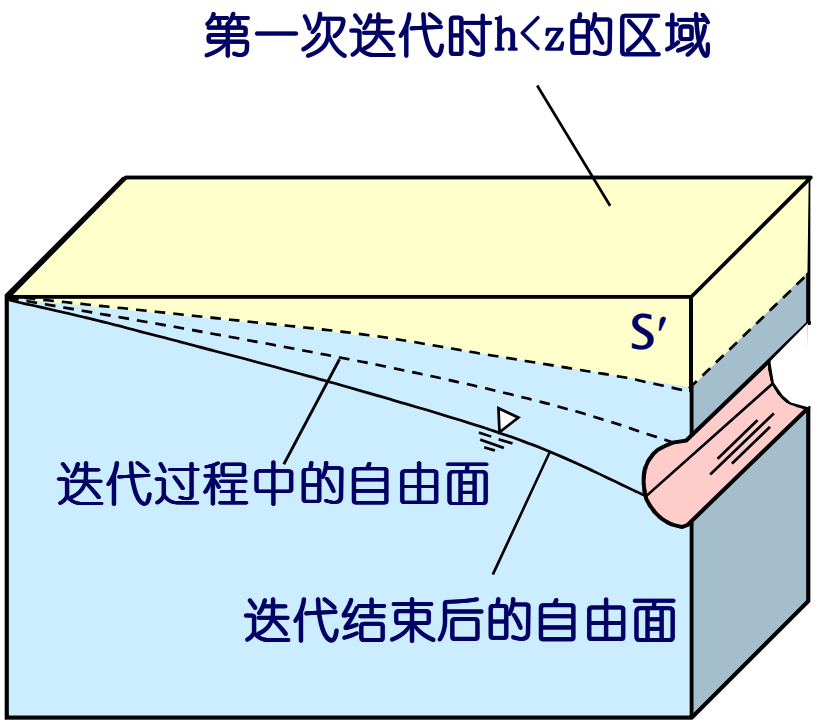
P257



1. 对全域进行计算
2. 用H=z确定近似自由水面
3. 计算近似自由水面的法向流速v_n
4. 在近似自由水面上叠加$-v_n$，计算其相应节点流量，修正方程右边项。
5. 重新进行计算。并按上述的步骤进行迭代，直到近似自由水面上近似满$v_n=0$

自由水面处理 – 剩余流量法

P258



☞ 取计算的h<z的区域S′为考虑的域，该域不应包含在计算域之内，即不应对其它部分所形成的方程有影响。但其中一单元e的影响为：

$$\{\overline{Q}^{e'}\} = [C^{e'}] \cdot \{H^{e'}\}$$

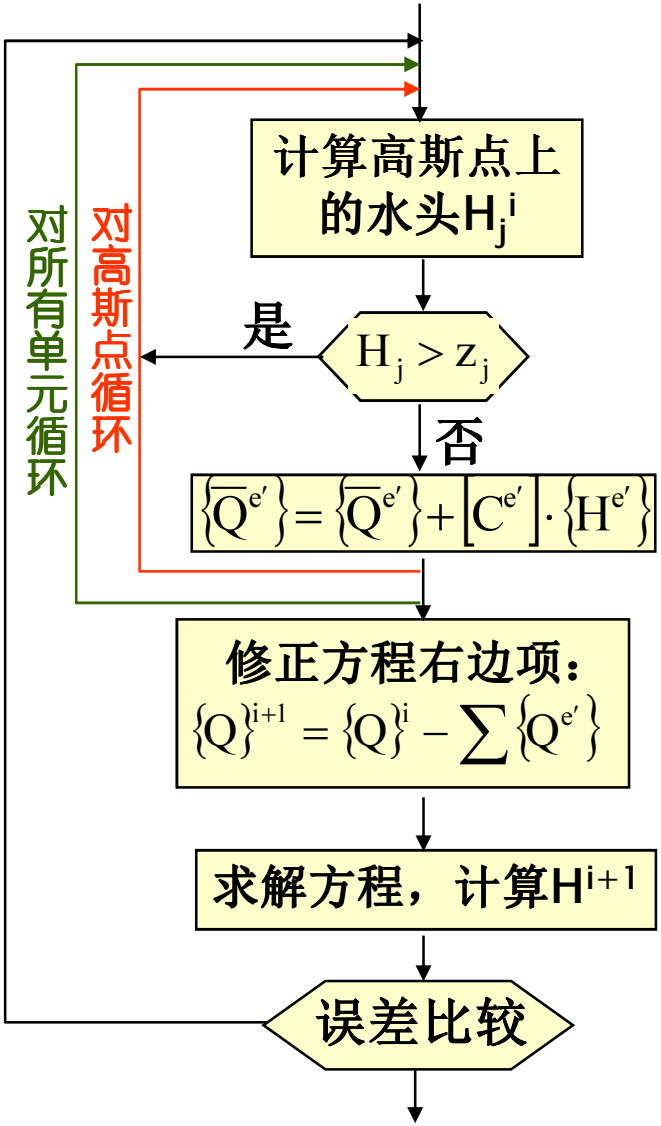
影响相当于产生了结点流量

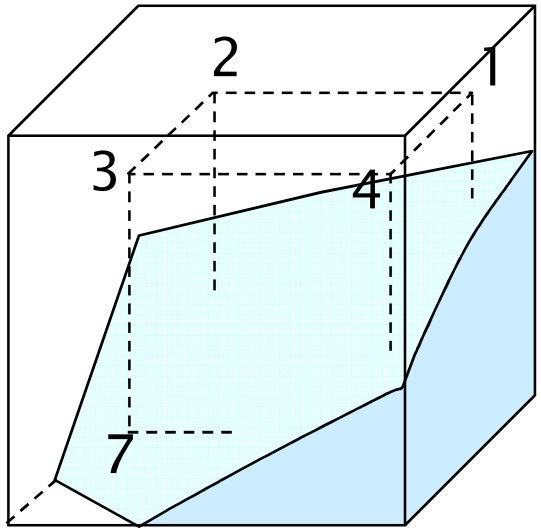
校正： $[C] \cdot \{H_n\} = \{Q_n\} - \sum_{S'} \{\overline{Q}^{e'}\}$

相当于施加相反的结点流量，以校正影响

自由水面处理 – 初始流量法

P258 （4）





高斯点1–4和7位于渗透区之外

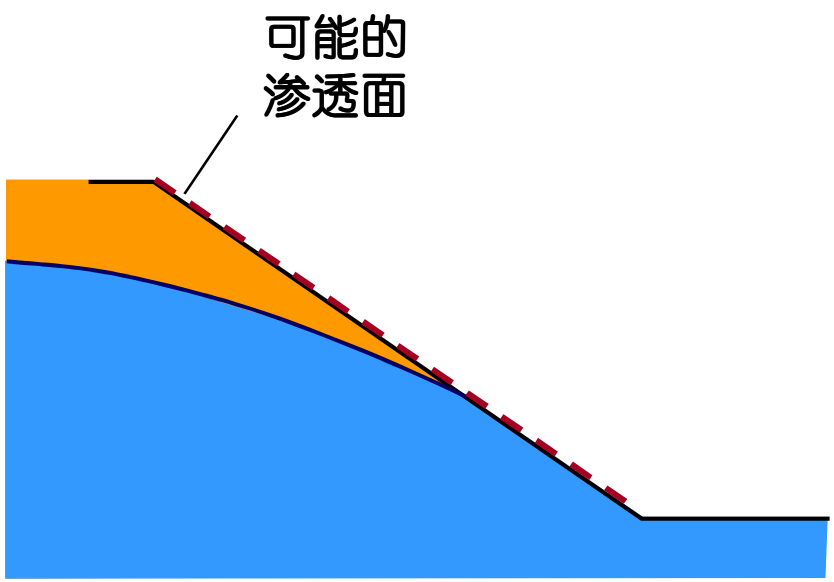
$$[c^{e'}] = \sum_i [B_i]^T \cdot [k^e] \cdot [B_i] \cdot \det[J] \cdot \alpha_i$$

$(i=1, 2, 3, 4, 7))$

自由水面处理 – 初始流量法

P258

- 条件：$\begin{cases} H = z \\ v_n > 0 \end{cases}$



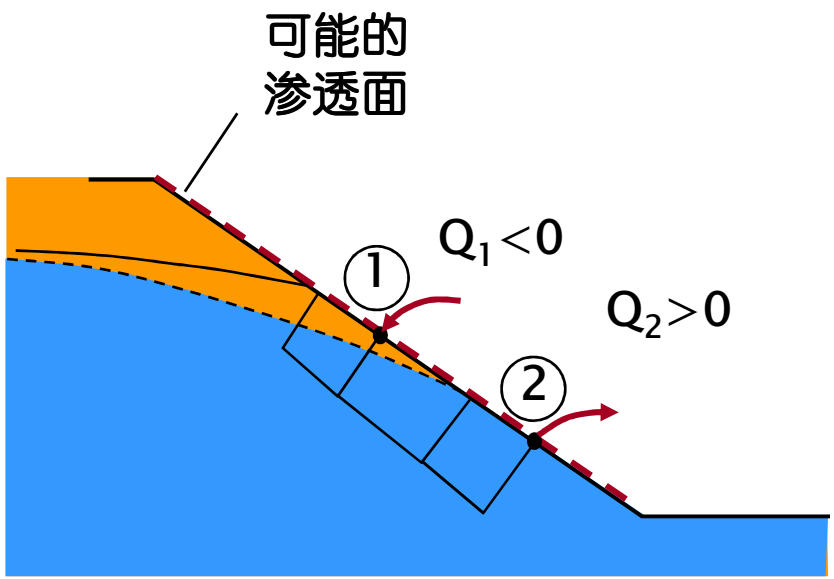
- 渗出面位于边界上，需要事先给定边界条件（H=z）
- 其位置事先大致知道，但无法完全确定
- 需在计算中用迭代计算确定

渗出面的处理(1)

P260

节点2为合适的渗出节点

节点1为不恰当的渗出节点，需进行修正



1. 假定可能的渗透面上的节点全部为渗出点 ⇨ $H_i=z_i$
2. 初步进行计算
3. 对可能的渗透面上的单元，计算其对应的节点上的流量值Q_i
4. 对节点流量值$Q_i<0$的节点，取$H_j^{i+1}=\chi\cdot H_j^i$（$\chi<1$，如$\chi=0.95$）
5. 计算由于水头差（$H_j^{i+1}-H_j^i$）所产生的方程右边项的修正值
6. 修正方程右边项
7. 重新进行计算。并按上述的步骤进行迭代，直到所有渗出点满足条件。

渗出面的处理（2）

- 渗流计算分析方法
- 饱和稳定渗流的有限元方程
- 饱和稳定渗流边界条件处理
- 饱和非稳定渗流有限元求解方法

4.5.3 饱和土非稳定渗流的有限元计算方法

P261 4.5.3

- 控制方程及边界和初始条件
- 有限元方程
- 时间导数项处理
- 边界条件处理

饱和非稳定渗流有限元方法

P261 4.5.3

■ 运动方程：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_{xx}\cdot\frac{\partial H}{\partial x}+k_{xy}\cdot\frac{\partial H}{\partial y}+k_{xz}\cdot\frac{\partial H}{\partial z}\right)$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_{yx}\cdot\frac{\partial H}{\partial x}+k_{yy}\cdot\frac{\partial H}{\partial y}+k_{yz}\cdot\frac{\partial H}{\partial z}\right)$$
$$+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_{zx}\cdot\frac{\partial H}{\partial x}+k_{zy}\cdot\frac{\partial H}{\partial y}+k_{zz}\cdot\frac{\partial H}{\partial z}\right)+\boxed{S_s\frac{\partial H}{\partial t}}+Q=0$$

■ 边界条件：

1. 水头边界条件　　Ω_1上给定水头
2. 流速（流量）边界条件　　Ω_2上给定法向流速（量）
3. 渗出面　　Ω_3上$h=z$，$v_n>0$
4. 自由水面*　　Ω_4上$h=z$，$\boxed{v_n\neq 0}$

■ 初始条件：　$H(x,y,z,t=0)=H_0(x,y,z)$

饱和非稳定渗流问题描述

☞ 在二维的情况下有：

$$I(H)=\iint_S\left\{\frac{1}{2}\left[k_{xx}\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2+k_{yy}\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2+2k_{xy}\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial y}\right]+\boxed{S_sH\frac{\partial H}{\partial t}}-QH\right\}dxdy+\int_{\Gamma_2}v_nHd\Gamma$$

其中，函数H在边界Ω_1上应满足第1类边界条件

非稳定渗流运动方程的泛函

P261 4.5.3 式4-104

☞ 采用和稳定渗流同样的推导步骤可得：

$$\sum_{e=1}^{N}[C]^e\cdot\{H\}^e+\sum_{e=1}^{N}[S]^e\cdot\{\dot{H}\}^e-\sum_{e=1}^{N}\{Q\}^e=0$$

$$[C]\cdot\{H\}+[S]\cdot\{\dot{H}\}=\{Q\}$$

与时间相关，下面将该式对时间进行积分

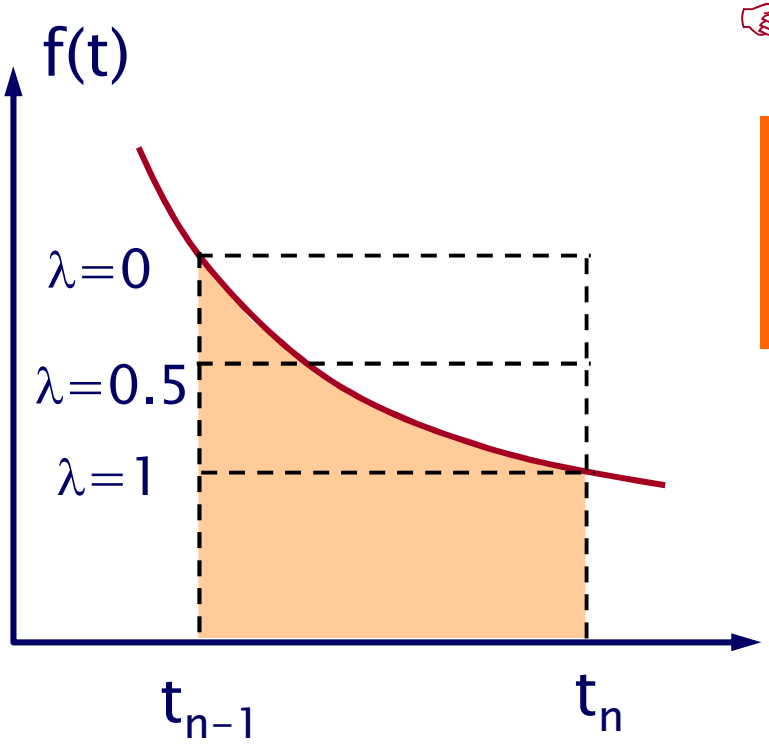
式中：

$$[C]^e=\iint_e[B]^T\cdot[k]\cdot[B]\cdot dx\cdot dy$$

$$\{Q\}^e=\iint_e[N]^T\cdot Q\cdot dx\cdot dy-\int_e[N]^T\cdot v_n\cdot d\Gamma$$

$$[S]^e=\iint_e[N]^T\cdot S_0\cdot[N]\cdot dx\cdot dy$$

渗流的有限元方程



☞ 数值积分方案：

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n} f(t)dt = \left[\lambda \cdot f(t_n) + (1-\lambda) \cdot f(t_{n-1})\right] \cdot \Delta t$$

Booker和Small(1975)证明当取0.5≤λ≤1时，上式是数值稳定的。经验表明，λ=0.5时效果较好。

数值积分方案

P262 图4-52

☞ 对所得的有限元方程对时间段积分：

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left([C]\cdot\{H\}+[S]\cdot\{\dot{H}\}\right)=\int_{t_{n-1}}^{t_n}\{Q\}$$

$$\Rightarrow\quad [\tilde{C}]\cdot\{H_{t_n}\}=\{Q_{t_{n-1}}\}+\{V_W\}$$

式中：

$$[\tilde{C}]=[S]+[C]\cdot\lambda\cdot\Delta t,\qquad \{Q_{t_{n-1}}\}=[C^*]\cdot\{H_{t_{n-1}}\}$$

$$[C^*]=[S]-[C]\cdot(1-\lambda)\cdot\Delta t,\qquad \{V_W\}=\{Q\}\cdot\Delta t$$

非稳定渗流的有限元方程

P263 式4-115

■ 方法一：作为流量边界引入泛函

（土工原理与计算，钱家欢、殷宗泽）

$$I(H)=\iint_S\left\{\frac{1}{2}\left[k_{xx}\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2+\cdots+S_sH\frac{\partial H}{\partial t}-QH\right\}dxdy$$

$$+\int_{\Gamma_2}v_nHd\Gamma$$

$$v_n=\mu\frac{\partial h}{\partial t}\cos\theta$$

自由水面边界

非稳定渗流的自由水面处理

■ 方法二：定义不同的单位贮存量S_s

(Tunnelstatik, Wittke)

$$I(H)=\iint_S\left\{\frac{1}{2}\left[k_{xx}\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2+\cdots+S_sH\frac{\partial H}{\partial t}-QH\right\}dxdy$$

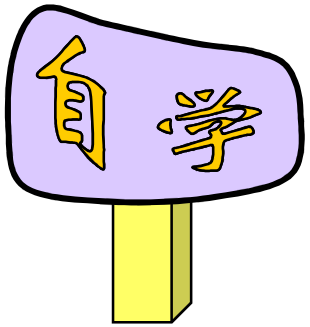
☞ 非自由水面单元：水密度变化、土颗粒及孔隙体积变化，通常可取为零

$$S_s=\rho g(\alpha+n\beta)\approx 0$$

☞ 自由水面单元：单元内下降（上升）1个单位水头所释放 （吸收）的储存水量

非稳定渗流的自由水面处理

P263-264



- 渗透力与渗透变形及其防治
- 渗流条件下土坡的稳定
- 挡土构造物上的土压力和水压力
- 基坑的井点降水

有关渗流的一些工程问题

P264 4.6

Ref: 李广信 高等土力学 第二版 清华大学出版社 2016

该PPT基本源于网络 请尊重原著者的版权！

The end

文件名格式：班级 学号 姓名 简略实验名称

邮件标题同文件名

Any questions please 发送至

xingzhengwu@163.com